

109 學年度全國高級中學第三次學科能力測驗(109-E3)

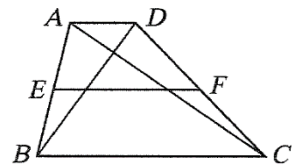
第壹部分：選擇題 (占 65 分)



一、單選題 (占 35 分)

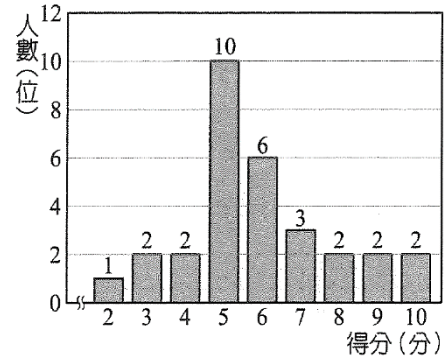
- 二次函數 $f(x) = x^2 + (a-2)x + a + 6$ 的圖形恰通過兩個象限，則滿足上述條件的整數 a 共有多少個？ (1) 11 個 (2) 12 個 (3) 13 個 (4) 14 個 (5) 15 個
- 坐標平面上，設 n 為正整數，已知點 $A_n(n, \log_2 n)$ 在函數 $f(x) = \log_2 x$ 的圖形上，若直線 $A_n A_{n+1}$ 的斜率為 m_n 且 $\sum_{k=1}^n m_k = 6$ ，則 n 值為何？ (1) 31 (2) 32 (3) 63 (4) 64 (5) 128

- 如右圖，已知梯形 $ABCD$ 中(其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)， E 、 F 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 之中點，則下列各選項中，何者與 \overrightarrow{EF} 不相等？



- (1) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ (2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ (3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
 - (4) $\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ (5) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD})$
- 試求多項式 $p(x) = (1+x)x^{29} + (1+x)^2x^{28} + \dots + (1+x)^{29}x + (1+x)^{30}$ 的展開式中， x^{10} 項的係數為下列何者？ (1) C_{21}^{31} (2) C_{21}^{32} (3) C_{22}^{32} (4) C_{20}^{32} (5) C_{20}^{30}
 - 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ 。在 $\triangle ABC$ 內部有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 。則其 $\angle C$ 的餘弦值為何？ (1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{5}{6}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{1}{2}$
 - 已知 O 是 $\triangle ABC$ 外接圓的圓心，若 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = \sqrt{17}$ 且 M 為 \overline{BC} 之中點，則 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO}$ 之值為何？ (1) $\sqrt{119}$ (2) $2\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{6}$ (4) 6 (5) 24

- 政府為了普及高中生的防疫知識，提升個人衛生管理意識，委託某衛生機構舉辦高中生防疫知識競賽。已知參加的 30 位高中生得分情形如右圖所示 (滿分 10 分)，假設得分的中位數為 Me ，眾數為 Mo ，算術平均數為 μ ，則下列選項何者正確？
(1) $Me = Mo = \mu$ (2) $Me = Mo < \mu$ (3) $Me < Mo < \mu$
(4) $Mo < Me < \mu$ (5) $Mo < \mu < Me$



二、多選題 (占 30 分)

- 設實數數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.1 的等比數列，實數數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 5 的等差數列。已知 $a_3 b_3 < 0$ 且 $a_3 a_4 b_4 > 0$ ，則下列選項何者正確？
(1) 數列 $\langle b_n \rangle$ 的公差小於 0 (2) $a_1 < 0$ (3) 若 $a_8 > a_9$ ，則 $a_9 < a_{10}$
(4) $a_3 b_5 < 0$ (5) $b_4 < 0$
- 設 a 、 b 、 c 是三個相異實數， $p(x)$ 是三次以上的實係數多項式。已知所 $p(x)$ 除以 $(x-a)$ 的餘式為 a ； $p(x)$ 除以 $(x-b)$ 的餘式為 b ； $p(x)$ 除以 $(x-c)$ 的餘式為 c 。假設多項式 $p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的餘式為 $r(x)$ ，則下列選項何者正確？
(1) $r(x) = a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-b)(c-a)}$ (2) $r(x)$ 有最大值
(3) $r(x)$ 有最小值 (4) $r(2020) = 2020$
(5) 考慮 $x > 0$ 時，若 $a > 1$ ，則 $r(x) > \log_a x$ 恆成立

10. 考慮下列方程式，必有實數解的有哪些？(1) $4x + \frac{1}{x} = \pi$ (2) $|x-2| + |x+6| = \sqrt{61}$

(3) $3^x = x$ (4) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ (5) $x^3 + 1 = 2020x$

11. 坐標平面上，有一直線 $L: y = x$ 及圓 $C_1: (x-5)^2 + (y-1)^2 = 4$ 與圓 $C_2: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 。若點 P 在直線 L 上且點 M 、 N 分別在圓 C_1 及圓 C_2 上，下列選項正確的有哪些？

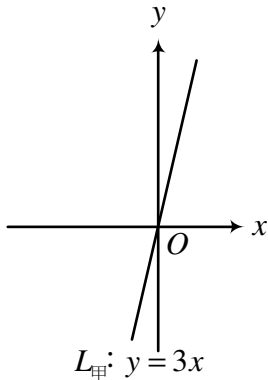
(1) 圓 C_1 對直線 L 之對稱圓方程式為 $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ (2) \overline{MN} 之最小值為 $4\sqrt{5}$

(3) $\overline{PM} + \overline{PN}$ 之最小值為 $4\sqrt{5}$ (4) $|\overline{PM} - \overline{PN}|$ 之最大值為 8

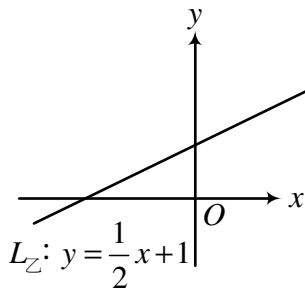
(5) 當 $|\overline{PM} - \overline{PN}|$ 有最大值時，此時 P 點坐標為 $(5,5)$

12. 以下(甲)~(戊)圖分別為 5 組不同數據依照最小平方法所求得之迴歸直線方程式，

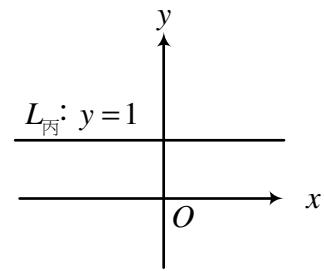
(甲)



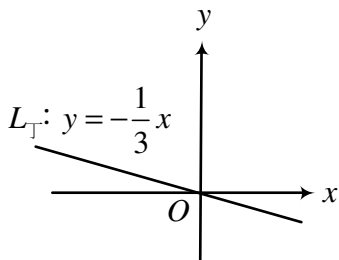
(乙)



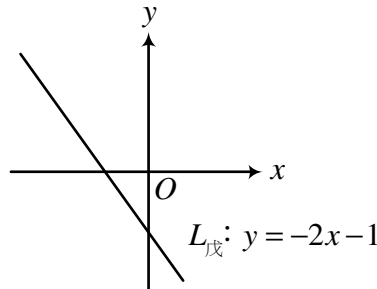
(丙)



(丁)



(戊)



試判斷下列選項正確的有哪些？

(1) 由直線斜率可以確定變量關係是正相關的為(甲)(乙)圖，變量關係是零相關的為(丙)圖，變量關係是負相關的為(丁)(戊)圖

(2) 在(甲)(乙)圖中，因為 $L_甲$ 的斜率大於 $L_乙$ 的斜率，所以(甲)圖變量間的相關係數大於(乙)圖變量間的相關係數

(3) (丙)圖的迴歸直線為一水平直線，所以其變量所對應的散佈圖中，數據會落在一條水平線上

(4) (甲)(丁)圖中的變量數據可能為標準化數據

(5) 在(甲)圖中， y 變量的標準差 (σ_y) 必大於 x 變量的標準差 (σ_x)

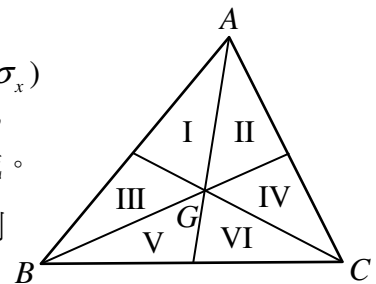
13. 如右圖所示，坐標平面上有一 $\triangle ABC$ ， G 為 $\triangle ABC$ 的重心，三中線將三角形內部分成 I、II、III、IV、V、VI 等 6 個區域。

M 點滿足 $a\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ ，其中 a 、 b 、 c 皆為正實數。則下列敘述哪些正確？

(1) 若 $a = b + c$ ，則 B 、 M 、 C 三點共線 (2) 若 $a = 3b = 3c$ ，則 M 落在重心 G 上

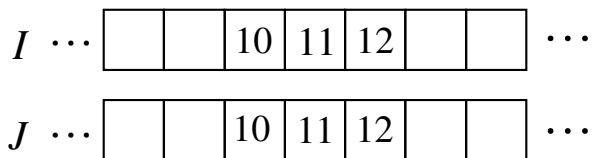
(3) 若 $2a = 3b = 12c$ ，則 M 落在 \overline{BG} 中點 (4) 若 $a:b:c = 7:4:1$ ，則 M 落在 I 區

(5) 若 $b + c < \frac{2}{3}a$ ，則 M 會落在 I、II、IV、VI 區



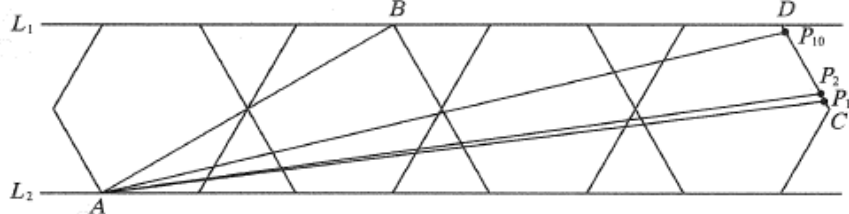
第貳部分：選填題（占 35 分）

- A. 小華參加語文朗讀競賽，獲得6位評審委員所給的分數由低至高分別為7、7、8、8、 a 、 b 。已知小華獲得分數的平均數為8，試求： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b-1}$ 的最小可能值為_____。
(化為最簡分數)
- B. 設多項式函數 $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 a, b, c, d 是實數。若 $p(1) = 2020$ 、 $p(2) = 4040$ 及 $p(3) = 6060$ 。試求： $\frac{1}{4}[p(11) + p(-7)] =$ _____。
- C. 直角三角形 ABC 中，已知 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{AC} = 24$ 且 $\angle CAB = 90^\circ$ 。若點 D 在三角形所在平面上且滿足 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = 0$ ，則 $|\overrightarrow{AD}|$ 之最大值為_____。
- D. 男生小毅以及小華與女生小花相約一起去看電影。進入電影院後發現只剩下第 I 排10、11、12號位置，以及第 J 排第10、11、12號位置，如下圖所示。假設此6個位置可以自由選坐，請問小毅不與小花相鄰(坐在左右側)的坐法有_____種。

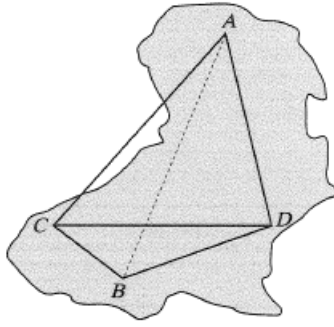


- E. 小如要把雙手的10支手指頭擦指甲油。現在她有一罐粉色指甲油以及一罐透明亮片指甲油。若每個指甲都必須先擦上粉色指甲油，然後擦上透明亮片指甲油，如此才算完整擦好。試問：小如的2支大拇指會比其他手指先完整擦好指甲油的機率為_____。
(化為最簡分數)
- F. 如下圖所示， $L_1 // L_2$ 且此兩平行線間夾著四個邊長皆為2之正六邊形，其中 A, B, C, D 為六邊形之部分頂點且 $P_i (i = 1, 2, 3, \dots, 10)$ 在線段 \overline{CD} 上，滿足

$\overrightarrow{CP_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = \overrightarrow{P_9P_{10}} = \overrightarrow{P_{10}D}$ 。試求 $\sum_{i=1}^{10} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} =$ _____。



- G. 如下圖所示，森林公園工務局為了建置園區內的緊急救災系統，計畫於園區內偏遠的 A, B 景點之間架設高壓電纜線以因應救災系統電力使用。已知景點 A, B 與園區工作站 C, D 在同一平面上，且經由園區工作站人員實地測量得 $\overline{CD} = 9$ 公里、 $\angle ACD = 45^\circ$ 、 $\angle ADC = 75^\circ$ 、 $\angle BCD = 30^\circ$ 及 $\angle BDC = 15^\circ$ 。考慮電纜線自然下垂因素以及施工過程中的可能耗損工務局根據以往的施工經驗，評估實際所需要的電纜線長度大約為 A, B 之間直線距離的1.2倍。為了建置此緊急救災系統，工務局應準備高壓電纜線的長度為_____公里。(化為最簡根式)



RA388 109 學年度全國高級中學第三次學科能力測驗(109-E3)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (3) 3. (5) 4. (1) 5. (2) 6. (4) 7. (4) 8. (1)(3)(5) 9. (1)(4)
10. (4)(5) 11. (1)(4)(5) 12. (1)(5) 13. (1)(2)(3)

選填題：A. $\frac{4}{17}$ B. 5260 C. 25 D. 88 E. $\frac{1}{45}$ F. 960 G. $\frac{9\sqrt{42}}{5}$