全國公私立高級中學 109 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：109 年 11 月 4~5 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	5	3	4	2	2	245	2345	145	235	24	13	123	4	3
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	5	4	8	2	—	7	8	8	8	3	2	2	5	0

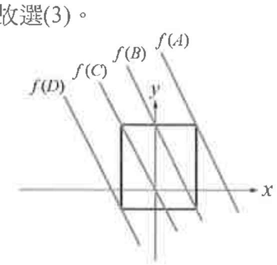
第壹部分：選擇題

一、單選題

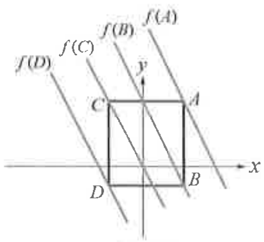
1. 因 $x=2^{8.4}$，$y=5^{3.4}$，$xy=2^{8.4}\times 5^{3.4}=2^5\times 2^{3.4}\times 5^{3.4}=2^5\times 10^{3.4}$
$\Rightarrow \log_{10}(xy)=\log(2^5\times 10^{3.4})=5\log 2+\log 10^{3.4}$
$\approx 1.505+3.4=4.905$，
故選(2)。

2. 由口罩個數次數分配長條圖可看出 x , y , z 三個地區均為對稱圖形，所以平均數 $\mu_x=\mu_y=\mu_z=3$
而標準差是觀察離散程度，y 地區最集中，z 地區最分散，所以 $\sigma_z>\sigma_x>\sigma_y$ ，故選(5)。

3. 設 $f(P)=2x+y=k$ 用斜率 -2 的直線且 k 值為直線的 y 截距，所以用 y 截距判斷其大小，滿足 $f(A)>f(B)>f(C)>f(D)$ 的圖形應為下圖(一)，再填上頂點，如圖(二)，
故選(3)。

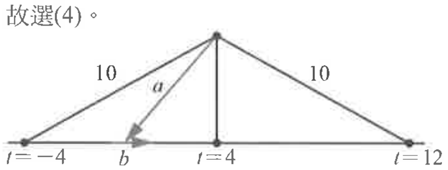


圖(一)

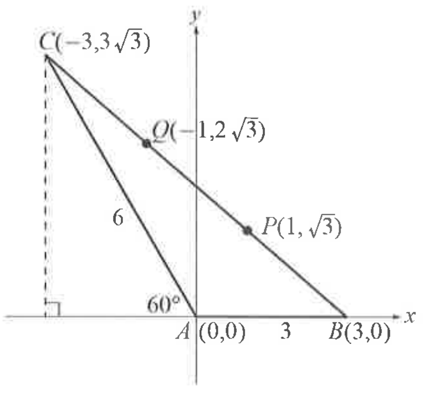


圖(二)

4. 當 t 為實數時，由向量的示意圖可知，$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 的終點會落在同一直線上，所以當 $t=-4$ 時，此向量長度為 10。再由對稱可知，當 $t=\dfrac{-4+12}{2}=4$ 時，$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 有最小值，
故選(4)。



5. 如下圖，定坐標為 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(-3,3\sqrt{3})$。
因此 P , Q 坐標為 $P(1,\sqrt{3})$，$Q(-1,2\sqrt{3})$。
$\overline{AQ}$ 的斜率為 $-2\sqrt{3}$ ，$\overline{AP}$ 的斜率為 $\sqrt{3}$ ，
$\tan\angle PAQ=\tan(\angle QAB-\angle PAB)$
$$=\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+(-2\sqrt{3})\times\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{-5}=\frac{3\sqrt{3}}{5}，$$
故選(2)。



6. 觀察式子 $\sin(2\theta+x)-2\sin(\theta+x)\cos\theta$ 中角度之間的關係得 $2\theta+x=(\theta+x)+\theta$
利用和角公式：
$a=\sin(2\theta+x)-2\sin(\theta+x)\cos\theta$
$=[\sin(\theta+x)\cos\theta+\cos(\theta+x)\sin\theta]-2\sin(\theta+x)\cos\theta$
$=\cos(\theta+x)\sin\theta-\sin(\theta+x)\cos\theta$
$=\sin\theta\cos(\theta+x)-\cos\theta\sin(\theta+x)$
$=\sin[\theta-(\theta+x)]=\sin(-x)=-\sin x\approx -0.7251$，
故選(2)。

二、多選題

7. (1) ×：直角三角形 ADF 中，$\overline{AD}=60$，$\overline{DF}=30$，
由畢氏定理可知 $\overline{AF}=\sqrt{60^2-30^2}=30\sqrt{3}$ ，
因此 $\overline{AG}=30\sqrt{3}$ 。
(2) ○：$\triangle ADF$ 為 30°-60°-90°的三角形，
$\angle DAF=\angle DAG=30°$，$\angle GAF=60°$。
(3) ×：$\triangle ADF$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 30\times 30\sqrt{3}=450\sqrt{3}$ 。
(4) ○：$\overline{BH}=100\tan 60°=100\sqrt{3}$ ，
$\triangle ABH$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 100\sqrt{3}\times 100=5000\sqrt{3}$ 。
(5) ○：由對稱性可知$\triangle ADG$ 的面積亦為 $450\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ 扇形 $DFEG$ 的面積為 $30^2\pi\times\dfrac{2}{3}=600\pi$ 。
灰色區域的面積為
$5000\sqrt{3}-2\times 450\sqrt{3}-600\pi=4100\sqrt{3}-600\pi$
故選(2)(4)(5)。

8. A 為在每個月初均存 1 萬元的本利和。
B 為在 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 月初均存 2 萬元的本利和。
C 為在 3 , 6 , 9 , 12 月初均存 3 萬元的本利和。
D 為在 12 月初存 12 萬元的本利和。
以上四種情況皆在銀行存入 12 萬元，差別只有存錢的時間點不同，越早將錢存入，本利和越大，因此 $B>A>C>D$，
故選(2)(3)(4)(5)。

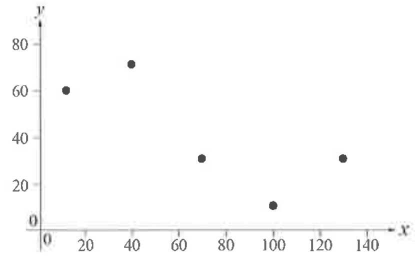
9. (1) ○：$\begin{cases} f(n)=a\times r^n+c=10 \\ f(n+12)=a\times r^{n+12}+c=20 \\ f(n+24)=a\times r^{n+24}+c=80 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} f(n+12)-f(n)=a\times r^n(r^{12}-1)=10 \\ f(n+24)-f(n+12)=a\times r^{n+12}(r^{12}-1)=60 \end{cases}$
$\Rightarrow r^{12}=\dfrac{a\times r^{n+12}(r^{12}-1)}{a\times r^n(r^{12}-1)}=6$，$r=6^{\frac{1}{12}}$ 。
(2) × (3) ×：代入 $a\times r^n(r^{12}-1)=10$，可得 $a\times r^n=2$。
故無法得到確切的 a 值與 n 值。
(4) ○：代入 $a\times r^n+c=10$，可得 $c=8$。
(5) ○：令第 $n+k$ 天時確診人數首次突破 40 萬人，
因此 $f(n+k)=a\times r^{n+k}+c>40$
$\Rightarrow a\times r^{n+k}+c=a\times r^n\times r^k+c=2\times r^k+8>40$
$\Rightarrow r^k>16\Rightarrow 6^{\frac{k}{12}}>16\Rightarrow \dfrac{k}{12}\log 6>\log 16$

$\Rightarrow k>12\times\frac{\log 16}{\log 6}\approx 12\times\frac{1.2040}{0.7781}\approx 18.6$，

故依此模型，在經過 $n+19$ 天（3 月 26 日）時確診人數首次突破 40 萬人。

故選(1)(4)(5)。

10. (1) ×：作 x 與 y 的散佈圖，如下圖，知 $r_{xy}<0$。



(2) ○：由表(1)可看出 y 的數據比 x 集中，

故 $\sigma_x>\sigma_y>0$，即 $0<\frac{\sigma_y}{\sigma_x}<1$，

又因爲 $r_{xy}<0$，所以 $r_{xy}<r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}<0$。

已知 L 的斜率 $m=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，所以 $r_{xy}<m$。

(3) ○：因為 x 的平均數 $\mu_x=70$，y 的平均數 $\mu_y=40$

且 L 通過點 (μ_x,μ_y)，所以 L 通過點 $(70,40)$。

(4) ×：已知 L 的斜率

$$m=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2}\cdots\cdots①$$

作 6 行表格如下。

將總和代入①得 $m=-0.4$。

x	y	$x_i-\mu_x$	$y_i-\mu_y$	$(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$	$(x_i-\mu_x)^2$
10	60	-60	20	-1200	3600
40	70	-30	30	-900	900
70	30	0	-10	0	0
100	10	30	-30	-900	900
130	30	60	-10	-600	3600
總和				-3600	9000

(5) ○：承(3)與(4)，最適合直線為

L：$y-40=-0.4(x-70)$，$x=170$ 代入，得 $y=0$。

故選(2)(3)(5)。

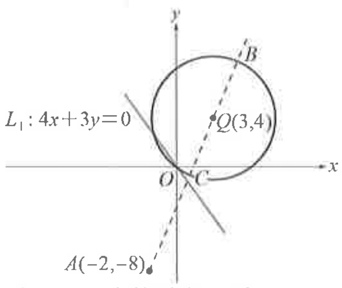
11. (1) ×：$x^2+y^2-6x-8y=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$，

所以圓心 Q 坐標為 $(3,4)$，$r=5$。

(2) ○：如下圖，連直線 AQ，設交 Γ 於 B 點及 C 點。

則 Γ 上的點與 A 點最遠距離為

$\overline{AB}=\overline{AQ}+5=13+5=18$。



(3) ×：承(2)，Γ 上的點與 A 點

最近距離為 $\overline{AC}=\overline{AQ}-5=8$。

所以 Γ 上的點與 A 點距離為整數的有 8～18 的整數，其中距離等於 8 的恰有一 C 點，距離等於 18 的恰有一 B 點，其它距離為 9～17 的整數的各恰有兩點，總共有 $1+2\times9+1=20$ 個點與 A 點距離為整數。

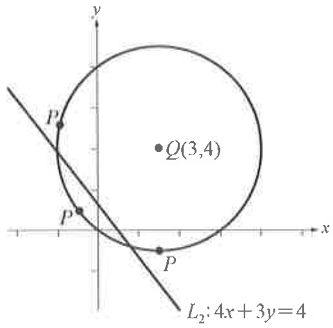
(4) ○：因為 $d(Q,L_1)=\frac{|4\times3+3\times4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{24}{5}<5=r$，

所以 L_1 與 Γ 恰交於相異兩點。

(5) ×：因為 $d(Q,L_2)=4$，$r=5$，由下圖可知，

若 $d(P,L_2)=1$ 且 P 在圓上，

則符合 P 的點恰有 3 個。



故選(2)(4)。

12. (1) ○：因為 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(1,0)$，

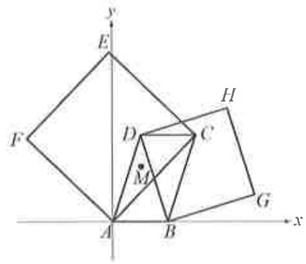
所以 C 點坐標 $=(p,q)+(1,0)=(p+1,q)$。

(2) ×：如圖，因為 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{AC}$ 且 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AC}|$，

所以 $\overrightarrow{AF}=(-q,p+1)$ 或 $\overrightarrow{AF}=(q,-p-1)$，

又因為 $\overrightarrow{AF}$ 的 x 分量是負的，所以 $\overrightarrow{AF}=(-q,p+1)$。

$\Rightarrow F$ 點坐標 $(-q,p+1)$。



(3) ○：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(p,q)-(1,0)=(p-1,q)$。

(4) ×：如圖，因為 $\overrightarrow{BG}\perp\overrightarrow{BD}$ 且 $|\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BD}|$，

所以 $\overrightarrow{BG}=(-q,p-1)$ 或 $\overrightarrow{BG}=(q,1-p)$，

又因為 $\overrightarrow{BG}$ 的 x 分量是正的，所以 $\overrightarrow{BG}=(q,1-p)$。

(5) ×：$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AG})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})=(\frac{1}{2},1)$，

所以 M 點的坐標為 $(\frac{1}{2},1)$，

所以與 D 點的坐標無關。

故選(1)(3)。

13. (1) ○：因為 $f(1)=g(1)$。

(2) ○：若 $r(x)$ 為次數不超過二次的多項式函數

且 $r(1)=g(1)$，$r(2)=g(2)$，$r(3)=g(3)$，

則 $r(x)=g(x)$。

設 $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+r(x)$，

其中 $r(x)$ 次數不超過二次，所以 $r(x)=g(x)$，

即 $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+g(x)$。

設 $g(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $ax+b$，

即 $g(x)=k(x-2)(x-3)+ax+b$，

代入 $f(x)=(x-2)(x-3)[2(x-1)+k]+ax+b$，

再由除法原理可知此選項正確。

(3) ○：因為 $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+g(x)$，

且 $g(x)$ 次數為二次，所以由除法原理可知正確。

(4) ×：因為 $f(x)-g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$，

所以 $f(0)-g(0)=2\times(-1)\times(-2)\times(-3)=-12$。

(5) ×：解 $f(k)-g(k)=2(k-1)(k-2)(k-3)\le0$，

得 $k\le1$ 或 $2\le k\le3$，

若 $1\le k\le2$ 時，則 $f(x)\ge g(x)$。

故選(1)(2)(3)。

第貳部分：選填題

A. $ab+2a+3b=(a+3)(b+2)-6$，

由算幾不等式可知 $\dfrac{(a+3)+(b+2)}{2} \geq \sqrt{(a+3)(b+2)}$

$\Rightarrow 49 \geq (a+3)(b+2) \Rightarrow 43 \geq (a+3)(b+2)-6$，

因此最大值為 43。

B. 每個數字都可有可無，共有 $2^8=256$ 種密碼。扣除全部都按與全部都不按這 2 種，可知共有 254 種密碼，最多試 254 次必定可以開鎖。

C. 因三數 $\log_{27}(3k)$, $\log_9 k$, $\log_3 k$ 成等比數列，所以

$(\log_9 k)^2=(\log_{27} 3k)\times(\log_3 k)$

$\Rightarrow (\dfrac{1}{2}\log_3 k)^2=\dfrac{1}{3}(1+\log_3 k)\times(\log_3 k)$。

設 $t=\log_3 k \Rightarrow \dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{1}{3}(1+t)t$

$\Rightarrow t^2+4t=0 \Rightarrow t=-4$ 或 0（不合），

所以 $\log_3 k=-4 \Rightarrow k=3^{-4}=\dfrac{1}{81}$，

故 $p+q=81+1=82$。

D. 直線 AB 的方程式為 $y=3x$，所以設 $A(t, 3t)$，其中 t 為實數，且 t 不為 0。

又直線 BC 的方程式為 $y=-\dfrac{1}{3}x$，所以設 $C(s, -\dfrac{1}{3}s)$，其中 s 為實數，且 s 不為 0。

又因直線 CA 的斜率為 $1 \Rightarrow \dfrac{3t+\frac{1}{3}s}{t-s}=1 \Rightarrow s=-\dfrac{3}{2}t$，

而 $\overline{AC}$ 的中點為 $D(\dfrac{s+t}{2}, \dfrac{3t-\frac{1}{3}s}{2})=(-\dfrac{t}{4}, \dfrac{7t}{4})$。

所以 $\overline{BD}$ 的斜率為 $\dfrac{\frac{7t}{4}}{-\frac{t}{4}}=-7$，故 m 之值為 -7。

E. 依 6 人分派到四家不同醫院的題意，所以四家不同醫院的分派人數只有 $(3, 1, 1, 1)$ 或 $(2, 2, 1, 1)$ 兩種情形

(1) $(3, 1, 1, 1)$：甲、乙、丙三人均不在同一家醫院，所以 3 人醫院無甲、乙、丙

有 $C_3^3\times 4!=24$（種）；

3 人醫院有甲、乙、丙其中一人

有 $C_1^3\times C_2^3\times 4!=216$（種）。

(2) $(2, 2, 1, 1)$：甲、乙、丙三人均不在同一家醫院，所以甲、乙、丙有兩個在 2 人醫院

有 $C_2^3\times C_1^3\times C_1^2\times 4!=432$（種）；

甲、乙、丙恰有一個在 2 人醫院

有 $C_2^3\times C_1^3\times 4!=216$（種）。

故分派方法共有 $24+216+432+216=888$ 種。

F. 已知鎮上某人的病毒檢測結果為病毒感染者，而他卻是未感染者的機率為

$\dfrac{(1-x)\times 15\%}{x\times 95\%+(1-x)\times 15\%} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{30-30x}{100} \geq \dfrac{95x+15-15x}{100}$

$\Rightarrow 15 \geq 110x \Rightarrow x \leq \dfrac{3}{22}$，

故 x 的最大值為 $\dfrac{3}{22}$。

G. $\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right|=|3-8|=5$，

因此 $\overrightarrow{u}=(1, 2)$ 與 $\overrightarrow{v}=(4, 3)$ 所張成的平行四邊形 T 的面積為 5。如右圖，符合

$\begin{cases}-1\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 4\\ x+y\geq 1\end{cases}$

的面積等同於 T 的 10 倍，

因此 Ω 的面積為 50。