數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(3)	(2)	(4)	(1)(5)	(1)(4)(5)
8.	9.	10.	11.			
(1)(3)(4)	(1)(4)(5)	(1)(4)	(1)(2)(5)			

第壹部分、選擇（填）題

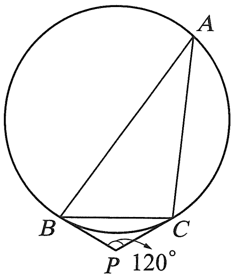
一、單選題

1. (2)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：圓的弦切角與正弦定理的運用

解析：



設兩切線交點為 P，則 $\angle PBC=\angle BAC=30^\circ$，令 R 為 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑，由正弦定理得

$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=2R \Rightarrow R=3$

故選(2)。

2. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能解含絕對值的一次不等式

解析：$-2x\leq 3x-k\leq 2x$

$\begin{cases} 5x\geq k \\ x\leq k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{k}{5}\leq x\leq k$

長度為 $k-\dfrac{k}{5}=10 \quad \therefore k=\dfrac{25}{2}$

故選(2)。

3. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：能理解題意列式、利用指對數的運算化為科學記號形式

解析：10 小時＝600 分 $\Rightarrow \dfrac{600}{20}=30$ 次

10 小時 20 分＝620 分 $\Rightarrow \dfrac{620}{20}=31$ 次

$1000\text{x}3^{31}-1000\text{x}3^{30}$

$=1000\text{x}3^{30}(3-1)$

$=2000\text{x}3^{30}$

$\Rightarrow \log(2000\text{x}3^{30})=\log 2000+\log 3^{30}$

$=\log 2+3+30\log 3$

$\approx 0.3010+3+30\text{x}0.4771$

$=17.614$

又 $\log 4<0.614<\log 5$

$\therefore 2000\text{x}3^{30}=4.\cdots\cdots\text{x}10^{17}$

較接近 10^{17}

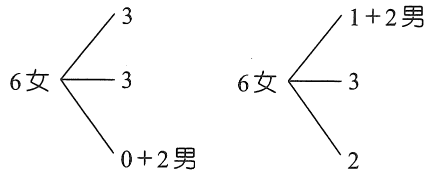
故選(3)。

4. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：使用分組分堆原則

解析：$n(S)=\dfrac{C^8_3C^5_3C^2_2}{2!}$，2 男同組情形如下圖



設 p 為 2 個男生同組的機率

所求為 $1-p=1-\dfrac{\dfrac{C^6_3C^3_3}{2!}\times 1+C^6_1C^5_3C^2_2\times 1}{\dfrac{C^8_3C^5_3C^2_2}{2!}}$

$=\dfrac{3}{4}$

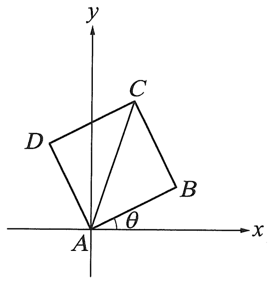
故選(2)。

5. (4)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：和角公式的運用

解析：



令 $\overline{AB}$ 與 x 軸的正向的夾角為 θ

$\therefore \tan(\theta+45^\circ)=m_{AC}=3$

$\therefore \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3 \quad \therefore \tan\theta=\dfrac{1}{2}=m_{AB}$

故選(4)。

二、多選題

6. (1)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：能熟悉和角公式並利用正餘弦函數疊合了解正餘弦的圖形

解析：$f(x)=2\sqrt{3}\left(\cos x\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-4\sin x$

$=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=2\left(\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(1)○：$\because 0<1+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore f(1)=2\cos\left(1+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$

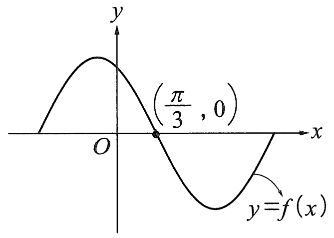
(2)╳：$\because -1\leq\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$

$\therefore f(x)$ 的最大值為 2

(3) ╳：$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=0$

承(2)，非最大值也非最小值

故$\left(\frac{\pi}{3}，f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$非波峰、波谷處，如下圖



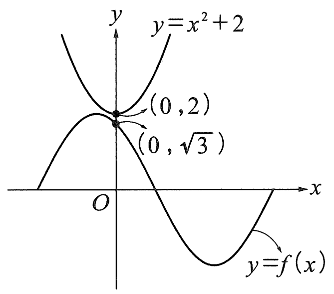
$\therefore y=f(x)$圖形不對稱於直線 $x=\frac{\pi}{3}$

(4) ╳：$\because -2\leq f(x)\leq 2 \quad \therefore f(x)=-3$ 無解

(5) ○：$y=f(x)$ 圖形是振幅為 2 的波，且 $f(0)=\sqrt{3}$

$y=x^2+2$ 是頂點在 $(0, 2)$，開口向上的拋物線

∴兩者無交點



故選(1)(5)。

7. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解三次函數圖形的廣域特徵、局部特徵與對稱中心的應用

解析：(1) ○：$y=f(x)$ 的廣域特徵近似於 $y=-2x^3$

(2) ╳：$y=f(x)=-2x^3+6x^2-2$

$=-2(x-1)^3+6(x-1)+2$

在 $x=1$ 處的局部特徵近似於

$y=6(x-1)+2=6x-4$

(3) ╳：$f(0.999)=-2(-0.001)^3+6(-0.001)+2\approx 1.994$

(4) ○：$y=f(x)$ 的對稱中心在 $(1, 2)$

故 $\frac{f(3+5\sqrt{7})+f(-1-5\sqrt{7})}{2}=2$

$\Rightarrow f(3+5\sqrt{7})+f(-1-5\sqrt{7})=4$

(5) ○：$\because (-2)\cdot 6<0$

∴過 $(1, f(1))$ 之水平線與 $y=f(x)$ 有三個交點

故選(1)(4)(5)。

8. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：等差、等比數列判斷與對數運算性質

解析：(1) ○：$\log_{1.5}a-\log_{1.5}110=\log_{1.5}110-\log_{1.5}b$

$\Rightarrow \log_{1.5}\frac{a}{110}=\log_{1.5}\frac{110}{b}$，故 $\frac{a}{110}=\frac{110}{b}$

(2) ╳：若 $\log_{1.5}(1911+a)$、$\log_{1.5}2021$、$\log_{1.5}(1911+b)$ 三數依序成等差數列，則

$\log_{1.5}(1911+a)-\log_{1.5}2021$

$=\log_{1.5}2021-\log_{1.5}(1911+b)$

$\Rightarrow \log_{1.5}\frac{1911+a}{2021}=\log_{1.5}\frac{2021}{1911+b}$

$\Rightarrow (1911+a)(1911+b)=(1911+110)^2$

$\Rightarrow ab=110^2+1911(220-a-b)$，故不合

(3) ○：$\log_{2.25}a^3=\log_{1.5^2}a^3=\frac{3}{2}\log_{1.5}a$，

$\log_{2.25}110^3=\frac{3}{2}\log_{1.5}110$，

$\log_{2.25}b^3=\frac{3}{2}\log_{1.5}b$，

顯然三數依序成等差數列

(4) ○：由(1)知 $ab=110^2$，由算幾不等式知

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{110^2}=220$，

因為 $a>b$，故等號不等立

(5) ╳：由(4)，

$\log_{1.5}(a+b)-\log_{1.5}110=\log_{1.5}\frac{a+b}{110}>\log_{1.5}2$，

但 $\log_{1.5}2<\log_{1.5}1.5^2=2$。

試舉反例 $a=121$、$b=100$，

$\log_{1.5}\frac{121+100}{110}<\log_{1.5}2.21<\log_{1.5}1.5^2=2$，

故選(1)(3)(4)。

9. (1)(4)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量運算與圓方程式的運用

解析：(1) ○：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，

因為 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，

故 $\overrightarrow{OC}$ 必平分 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角

(2) ╳：由(1)可知 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$

$\leq|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|=10$

(3) ╳：$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=50+50\cos\angle AOB$

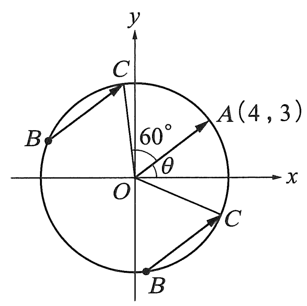
令 θ 為 $\overrightarrow{OA}$ 與 x 軸正向夾角，$\theta\approx 37^\circ$，由(1)知

$\angle AOB=2\angle AOC=2(90^\circ-\theta)<120^\circ$

$\Rightarrow\cos\angle AOB>-\frac{1}{2}$，

所以 $|\overrightarrow{OC}|^2>50-50\cdot\frac{1}{2}=25$，故 C 落在圓 Γ 的外部

(4) ○：設 $C(a, b)$ 在圓 Γ 上，則$\angle AOC=60^\circ$，



令 $\overrightarrow{OA}$ 與 x 軸正向夾角為 θ，則 $\theta\approx 37^\circ$，

故 $\overrightarrow{OC}$ 與 x 軸正向夾角約為 $37^\circ\pm 60^\circ$，

故 C 可能落在第二或第四象限，故 $ab<0$

(5) ○：因為 $OACB$ 為菱形，

故 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|=5$，

所以 C 的軌跡為一個以 A 為圓心、半徑為 5 的圓，故 $-1\le a\le 9$

故選(1)(4)(5)。

10. (1)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：二維數據的分析比較

解析：設 R 表示答對題數，W 表示答錯題數，N 表示不作答題數

則 $X=R-\dfrac{W}{4}$，$Y=R+\dfrac{N}{5}$

且 $R+W+N=100\Rightarrow 5Y=4X+100$

(1) ○：$\therefore X\le Y\Rightarrow \mu_X\le\mu_Y$

(2) ╳：反例：兩位學生的作答題數如下表：

甲	R	W	N
題數	80	20	0
X	75		
Y	80		

乙	R	W	N
題數	80	0	20
X	80		
Y	84		

兩位學生的 X 分數之差的絕對值為 5 大於 Y 分數之差的絕對值為 4

(3) ╳：由 $5Y=4X+100$ 可知 X 與 Y 呈完全正相關且排名一致，相關係數 $r=1$

(4) ○：$\sigma_Y=\sigma_{\frac{4}{5}X+20}=\dfrac{4}{5}\sigma_X$

(5) ╳：由(3)可知 $r=1$

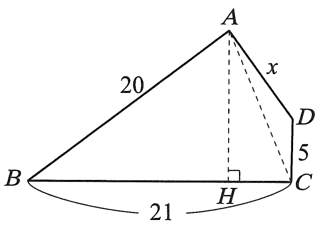
故選(1)(4)。

11. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：能利用餘弦定理解題

解析：



(1) ○：$\triangle ABC$ 中

$\overline{AC}=\sqrt{20^2+21^2-2\cdot 20\cdot 21\times\cos\angle ABC}$

$=\sqrt{20^2+21^2-2\cdot 20\cdot 21\times\dfrac{4}{5}}$

$=\sqrt{169}=13$

(2) ○：共圓 $\Rightarrow\angle ADC+\angle ABC=\pi$

$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC=\dfrac{-4}{5}$

令 $\overline{AD}=x$，$\triangle ACD$ 中

$\overline{AC}^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\left(-\dfrac{4}{5}\right)=13^2$

$\Rightarrow x^2+8x-144=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2+4\cdot 144}}{2}$

$=-4\pm4\sqrt{10}$ (負不合)

$\therefore \overline{AD}=4\sqrt{10}-4$

(3) ╳：$\because A$ 到 $\overline{BC}$ 邊上的高 $=\overline{AB}\sin\angle ABC=12>\overline{CD}$

$\therefore$ 梯形必為 $\overline{CD}\,/\!/\,\overline{AB}$

$\Rightarrow\cos\angle BCD=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos\angle ABC$

$=-\dfrac{4}{5}$

(4) ╳：$\triangle ACD$ 中

$\overline{AD}+\overline{CD}>\overline{AC}\Rightarrow x+5>13\Rightarrow x>8$

(5) ○：若 B、C、D 共線，

$\overline{AD}=\sqrt{20^2+26^2-2\cdot 20\cdot 26\cos\angle ABC}$

$=\sqrt{20^2+26^2-2\cdot 20\cdot 26\cdot\dfrac{4}{5}}$

$=\sqrt{244}=2\sqrt{61}$

$\because$ 凸四邊形　$\therefore\overline{AD}<2\sqrt{61}$

故選(1)(2)(5)。

三、選填題

12. $\dfrac{13}{22}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈數據分析〉

目標：利用級數和求平均數

解析：$n=1+2+\cdots\cdots+10=55$

$\therefore\mu=\dfrac{1+\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2+3}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1+2+\cdots\cdots+10}{10}}{55}$

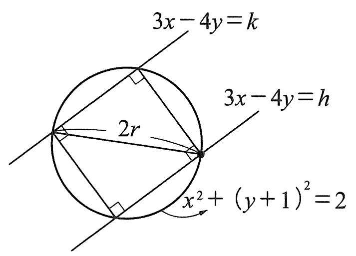
$=\dfrac{13}{22}$。

13. 8

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：運用兩直線的距離公式

解析：



配方得 $x^2+(y+1)^2=2$

可知圓心 $P(0,-1)$，半徑 $r=\sqrt{2}$，又 $d(L_1,L_2)=2$

可知 $d(P,L_1)=1=\dfrac{|4-h|}{5}\Rightarrow h=9$ 或 -1，

$d(P,L_2)=1=\dfrac{|4-k|}{5}\Rightarrow k=9$ 或 -1

因為 L_1 與 L_2 為相異直線，

故當 $h=9$ 時，$k=-1$ 或當 $h=-1$ 時，$k=9$，

故 $h+k=8$。

14. 670

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用餘式定理解題

解析：$\because$ 對稱點為 $(3,1)$

$\therefore$ 設 $f(x)=a(x-3)^3+p(x-3)+1$

又 $f(x)=(x^2-3x+2)\,Q(x)+14x-17$

$\Rightarrow\begin{cases}f(1)=-3\\f(2)=11\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a(-2)^3+p(-2)+1=-3 \\ a(-1)^3+p(-1)+1=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+p=2 \\ a+p=-10 \end{cases}$

$\therefore a=4$，$p=-14$

$\Rightarrow f(x)=4(x-3)^3-14(x-3)+1$

所求餘式為 $(6+4)f(6)$

$=10(4\times3^3-14\times3+1)$

$=670$。

15. $\dfrac{115}{2}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：列出所有可能狀況的機率求期望值

解析：$P(\text{三球同色})=\dfrac{3\times2\times1+4\times3\times2}{9\times8\times7}=\dfrac{5}{84}$，

$P(\text{三球異色})=\dfrac{C^2_1\times C^3_1\times C^4_1\times3!}{9\times8\times7}=\dfrac{2}{7}$，

故 $P(\text{三球恰有兩種顏色})=1-\dfrac{5}{84}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{55}{84}$，

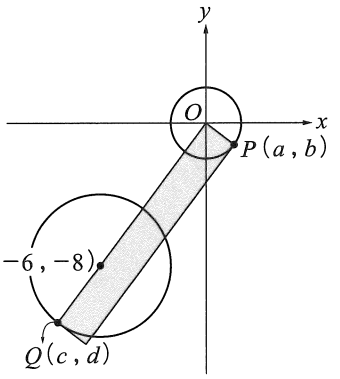
故所求期望值為 $\dfrac{5}{84}\times300+\dfrac{55}{84}\times30+\dfrac{2}{7}\times70=\dfrac{115}{2}$。

16. 28

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：使用行列式計算面積

解析：如下圖，設 $\overrightarrow{OP}=(a,b)$，$\overrightarrow{OQ}=(c,d)$



$\therefore \left|\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right|$ 為 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 所展開之平行四邊形的面積

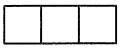
$\leq 2\times14=28$。

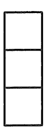
17. 204

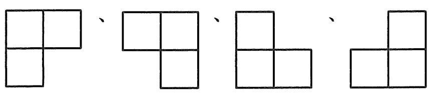
出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能利用窮舉法列出可能性，再利用排列組合方法求出方法數

解析：3 人座位相鄰，座位的選擇如下：

①  $\Rightarrow$ 4 種

②  例：1、4、7 $\Rightarrow 2\times3=6$ 種

③ 

$\Rightarrow 6\times4=24$ 種

$\therefore$ 3 人選擇有 $(4+6+24)\times\underbrace{3!}_{\text{3人排列}}=204$ 種。

第貳部分：混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：正確解讀保管費的計算方式

解析：每一天用量的保管費為 $90\times5=450$，故一次購買 5 天，

則要支付的保管費為 $450\times4+450\times3+450\times2+450$

$=4500$ 元

故選(3)。

19. $299775+225x+\dfrac{3600}{x}$ 元

出處：第一冊〈數與式〉

目標：正確解讀題意並以 x 列出每日平均支出

解析：所求為

$\dfrac{600\cdot500x+450[(x-1)+(x-2)+\cdots\cdots+1]+3600}{x}$

$=\dfrac{300000x+225x(x-1)+3600}{x}$

$=299775+225x+\dfrac{3600}{x}$。

◎評分原則

所求為

$\dfrac{600\cdot500x+450[(x-1)+(x-2)+\cdots\cdots+1]+3600}{x}$ (3 分)

$=\dfrac{300000x+225x(x-1)+3600}{x}$

$=299775+225x+\dfrac{3600}{x}$。 (2 分)

20. 4 天

出處：第一冊〈數與式〉

目標：正確解讀題意並利用算幾不等式求極值

解析：由算幾不等式得 $299775+225x+\dfrac{3600}{x}$

$\geq 299775+2\sqrt{225x\cdot\dfrac{3600}{x}}=301575$，

當等號成立時，$225x=\dfrac{3600}{x}\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm4$

故 4 天買一次才能使平均每天支付費用最少。

◎評分原則

由算幾不等式得 $299775+225x+\dfrac{3600}{x}$

$\geq 299775+2\sqrt{225x\cdot\dfrac{3600}{x}}=301575$， (3 分)

當等號成立時，$225x=\dfrac{3600}{x}\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm4$ (2 分)

故 4 天買一次才能使平均每天支付費用最少。 (1 分)