

# 數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(1)	(4)	(3)	(5)	(2)	(1)(2)
8.	9.	10.				
(3)(4)(5)	(3)(5)	(1)(3)(4)(5)				

## 第壹部分、選擇(填)題

### 一、單選題

1. (2)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：了解向量內積的性質，垂直的向量特性

解析：因為兩向量垂直，

$$\text{故}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0,$$

$$\text{展開得} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$$

故選(2)。

2. (1)

出處：第三冊〈三角函數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：能找到關鍵分界，清楚三角比、指數及根式，比較大小

解析：易知  $a = -27$ 、

$$0 < b < 1、$$

$$c > 1、$$

$$d = 0、$$

$$-1 < e < 0$$

所以  $a < e < d < b < c$

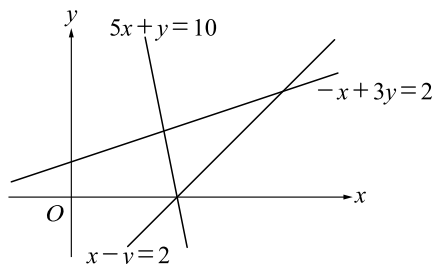
故選(1)。

3. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能透過二元一次不等式分析可行解區域

解析：如下圖，



可知只有選項(4)的可行解區域無圖形

故選(4)。

4. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能了解三次函數的局部特徵及對稱性

解析：因為對稱中心為  $(1, 8)$ ，

$$\text{可假設} y = f(x) = a(x-1)^3 + p(x-1) + 8$$

$$\text{展開得} y = ax^3 - 3ax^2 + (p+3a)x - a - p + 8$$

再由此圖形在  $x=0$  一次近似為  $y=x+5$ ，

$$\text{可得聯立方程式：} \begin{cases} p+3a=1 \\ -a-p+8=5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-1 \\ p=4 \end{cases}$$

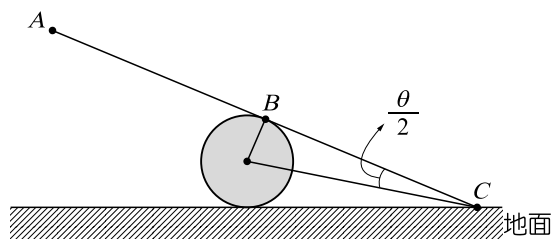
故選(3)。

5. (5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：能透過倍角公式或半角公式解決問題

解析：如下圖，



$$\text{可知} \tan \frac{\theta}{2} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$$

$$\text{所以} \tan \theta = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

故選(5)。

6. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能應用除法原理及因數分析、因式定理

解析： $x^3 + x + 90 = (x^2 - x + a)Q(x)$

因為  $Q(x)$  為整係數多項式

代  $x=0$ ： $90 = a \cdot Q(0) \Rightarrow a$  是 90 的因數

代  $x=1$ ： $92 = a \cdot Q(1) \Rightarrow a$  是 92 的因數

因此  $a$  可能為  $\pm 1$  或  $\pm 2$

當  $x=k > 0$  代入，得  $k^{13} + k + 90 > 0$

故  $x^{13} + x + 90 = 0$  沒有正根

$\therefore x^2 - x + a = 0$  沒有正根

$\Rightarrow a \neq -1, -2, -3$

故答案為 2

故選(2)。

## 二、多選題

7. (1)(2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：透過閱讀文字及圖表了解情境並解讀

解析：如題圖

(3)  $\times$ ：當頻率過低聽不到

(4)  $\times$ ：題目並無標示不舒服的範圍，無法判斷

(5)  $\times$ ：在 0Hz 到 500Hz 之間，聽閾與痛閾兩曲線間距比 500Hz 到 1000Hz 小，故所占面積不到一半

故選(1)(2)。

8. (3)(4)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能分析骰子的機率及期望值問題

解析：(1)  $\times$ ： $\therefore x > y$  的機率等於  $x < y$  的機率，而且  $x = y$  的機率不為 0

$$\therefore x \geq y \text{ 的機率不為 } \frac{1}{2}$$

(2)  $\times$ ：相乘為奇數的機率為  $\frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4}$ ，

故相乘為偶數的機率為  $\frac{3}{4}$

(3) ○：由算幾不等式可知：

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \text{ 即為 } x \neq y \text{ 的意思}$$

$$\text{因此所求} = 1 - \frac{6}{6 \times 6} = \frac{5}{6}$$

$$(4) \bigcirc : \frac{2+3+3+4+4+4+\cdots+11+11+12}{36} = 7$$

(分子為 36 種情形的總和)

$$(5) \bigcirc : \frac{(1+2+3+4+5+6)(1+2+3+4+5+6)}{36}$$

$$= \frac{49}{4} \text{ (分子為 36 種情形的總和)}$$

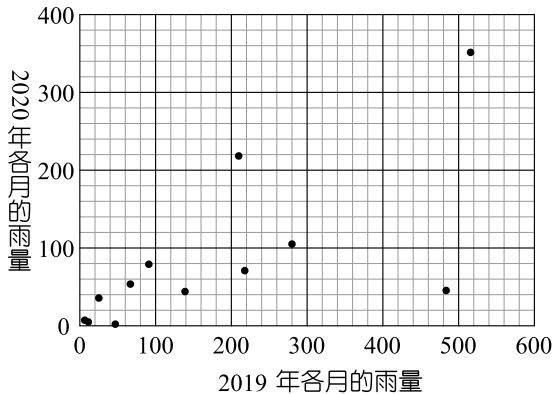
故選(3)(4)(5)。

9. (3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：透過時事分析圖表，並理解標準差與相關係數指標

解析：



(1) ×：2020年中，五月雨量比八月雨量大，與選項敘述不合

(2) ×：2018年中，五月平均雨量為

$$\frac{59 \text{ mm}}{31 \text{ 天}} \approx 1.9 \text{ mm/天}$$

而2018年全年每日平均雨量為

$$\frac{1164 \text{ mm}}{365 \text{ 天}} \approx 3.2 \text{ mm/天}$$

故與選項敘述不合

(3) ○：由數據加總為  $746 \text{ mm} < 800 \text{ mm}$

(4) ×：標準差是集中分散的指標，由題表知五月及六月皆高過八月

(5) ○：繪製散佈圖可看出正相關

故選(3)(5)。

10. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能透過排列組合，有系統的分析情境的問題

解析：(1) ○：  $C_2^5 = 10$  種

(2) ×：  $C_3^5 - 3 = 7$  種

3天連續的情況  
(一二三、二三四、三四五)

(3) ○：令兩位組長為  $A$ 、 $B$

則居家辦公的情況為  $AAAB$  或  $AABB$  任意排，

但是要扣除3天連續的情況

$$\text{故所求為 } 2 \times \left( \frac{5!}{2!3!} - 3 \right) = 2 \times (10 - 3) = 14 \text{ 種}$$

(4) ○：依題意，必有一天兩人同時在學校辦公，用  $X$  表示

故安排方法為  $AABBX$  任意排

$$\text{即 } \frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ 種}$$

(5) ○：依題意，令組長為  $A$ 、 $B$ ，主任為  $C$

而每天至少2人到校辦公，即每天最多1人居家辦公(可1人或0人)

故每天居家辦公的情況，可用  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $O$  去選擇( $O$ 表示0人申請居家)

任意排的情況為  $4^5 = 1024$  種

扣掉某一個人申請5天： $C_1^5 = 3$  種

再扣掉某一個人申請4天：

$$C_1^3 \times C_4^5 \times C_1^3 = 3 \times 5 \times 3 = 45 \text{ 種}$$

哪1人(不含  $O$ ) 哪4天 剩下1天是誰(含  $O$ )

最後再扣連續3天申請：

$$C_1^3 \times 3 \times C_1^3 \times C_1^3 = 81 \text{ 種}$$

哪1人(不含  $O$ ) 連續哪3天 剩下2天分別是誰(含  $O$ )

故所求為  $1024 - 3 - 45 - 81 = 895$  種

故選(1)(3)(4)(5)。

### 三、選填題

11. -4

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解二次函數的對稱性

$$\text{解析：} \because \frac{(x+3)+(1-x)}{2} = 2$$

$\therefore$  頂點在  $x=2$  上

故  $a=-4$ 。

12. 84.1

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用相似形對應邊成比例，透過根式運算解決問題

解析：令  $A1$  長邊為  $x$  公分， $A0$  長邊為  $y$  公分

$$\text{由(2)(3)：} \frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}}, \text{ 解得 } y^2 = 2x^2, \text{ 即 } y = \sqrt{2}x$$

$$\text{再由(1)：} xy = \sqrt{2}x^2 = (100)^2 = 10000,$$

$$\text{因此 } x = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx \frac{100}{1.414} \approx 70.71$$

13. 01001

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：清楚題目定義，並找到數列規律

解析：只考慮末五位數字，

從  $a_4 = 01101001$ 、 $a_5 = 0110100110010110$  開始觀察規律，

會發現後面的數列末五位數字為  $01001$ 、 $10110$  輪流出現，

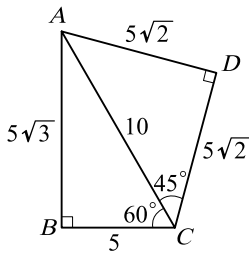
故  $a_{100}$  的最後五位數為  $01001$ 。

14.  $25\sqrt{6}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：透過特殊角三角比及正弦定理，解決長度問題

解析：



$$\frac{\overline{BD}}{\sin 105^\circ} = 2R = 10$$

$$\overline{BD} = 10 \cdot \sin 105^\circ = 10 \cdot \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\text{所求為 } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 25(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ = 25\sqrt{2} + 25\sqrt{6}。$$

15.  $\sqrt{19}$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：透過和角公式及正餘弦函數疊合解決問題

$$\text{解析：} f(\theta) = 2 \cos \theta + 3 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right)$$

$$= 2 \cos \theta + 3 \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)$$

$$= \frac{7}{2} \cos \theta + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$\text{疊合後 } f(\theta) = \frac{7}{2} \cos \theta + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{27}{4}} \sin(\theta + \alpha)$$

$\alpha$  是一個銳角，必可找到銳角  $\theta$  使得  $\theta + \alpha$  為 90 度

可取得最大值為  $\sqrt{19}$ 。

16. 729

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：閱讀理解問題情境，透過排列組合有系統的計數

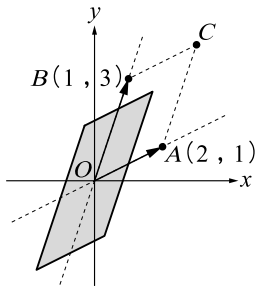
解析：將圖片由大到小依序放入任意三個圓杆的其中一個，則任意地擺放都是「合理的情況」，反之「合理的情況」也可由上述手續達到因此方法數為  $3^6 = 729$  種。

17.  $5\sqrt{2}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：清楚向量的線性組合，透過特殊角三角比找出  $P$  的所有可能

解析：



$$\square OACB = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\frac{-1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{-\sqrt{2}}{2} \leq \cos \beta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P \text{ 所在區域面積} = \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{-1}{2} \right) \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \right) \cdot 5 \\ = 5\sqrt{2}。$$

### 第貳部分、混合題或非選擇題

18. (5)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：清楚情境定義，透過指數解決感染人數增加情境問題

$$\text{解析：} \frac{30}{5} = 6 \text{ 次，變為 } 4^6 = 4,096 \text{ 倍}$$

故選(5)。

19. 第 6 天的  $R_t$  值為 4，第 12 天的  $R_t$  值為 3.79，第 18 天的  $R_t$  值為 3.53，說明略

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：清楚情境定義，透過對數的運算估計與解讀問題

$$\text{解析：(1) 第 6 天：} \log_2 \frac{16}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{6}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + 3 = 4$$

$$\text{(2) 第 12 天：} \log_2 \frac{96}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{12}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + \frac{\log_2(2^4 \cdot 3)}{2} \approx 3 + \frac{0.4771}{2 \cdot 0.301} \\ \approx 3.79$$

$$\text{(3) 第 18 天：} \log_2 \frac{384}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{18}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + \frac{\log_2(2^6 \cdot 3)}{3} \approx 3 + \frac{0.4771}{3 \cdot 0.301} \\ \approx 3.53$$

因為  $R_t$  有遞減趨勢，表三級警戒有效果。

### ◎評分原則

$$\text{(1) 第 6 天：} \log_2 \frac{16}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{6}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + 3 = 4 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{(2) 第 12 天：} \log_2 \frac{96}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{12}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + \frac{\log_2(2^4 \cdot 3)}{2} \approx 3 + \frac{0.4771}{2 \cdot 0.301} \\ \approx 3.79 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{(3) 第 18 天：} \log_2 \frac{384}{2} = (R_t - 1) \cdot \frac{18}{6} \\ \Rightarrow R_t = 1 + \frac{\log_2(2^6 \cdot 3)}{3} \approx 3 + \frac{0.4771}{3 \cdot 0.301} \\ \approx 3.53 \quad (3 \text{ 分})$$

因為  $R_t$  有遞減趨勢，表三級警戒有效果。(1 分)