全國公私立高級中學110學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學A考科解析

考試日期：110年11月3~4日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
2	3	5	4	1	3	1235	134	234	145	145	13	1	3	1
13-4	14-1	15-1	15-2	15-3	16-1	17-1	17-2	18	19	20				
6	2	1	2	8	5	1	8	2						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 分段討論，

① $x\geq\frac{3}{2}$：$2x-3\leq x\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow\frac{3}{2}\leq x\leq 3$。

② $0\leq x<\frac{3}{2}$：$-2x+3\leq x\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow 1\leq x<\frac{3}{2}$。

③ $x<0$：$-2x+3\leq -x\Rightarrow x\geq 3\Rightarrow$ 無解。

由①②③可知 $\Rightarrow 1\leq x\leq 3$，長度為 2，

故選(2)。

2. 設一般人高聲說話所產生的強度為 I_1，

樹葉沙沙聲所產生的強度為 I_2，所求 $m=\frac{I_1}{I_2}$。

又根據題意可得 $\Rightarrow\begin{cases}65=10\cdot\log\frac{I_1}{I_0}\\20=10\cdot\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}65=10(\log I_1-\log I_0)\cdots①\\20=10(\log I_2-\log I_0)\cdots②\end{cases}$

①－②可得 $45=10(\log I_1-\log I_2)\Rightarrow 4.5=\log\frac{I_1}{I_2}$

$\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=10^{4.5}=10^{0.5}\times 10^4$，又 $10^{0.5}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\approx 3.16$

$\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}\approx 3.16\times 10^4$，所以 m 最接近 30000，

故選(3)。

3. $\triangle ABC$ 面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}$，

其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$，$R=\triangle$ 外接圓半徑

$\Rightarrow\sqrt{\frac{15}{2}(\frac{15}{2}-3)(\frac{15}{2}-5)(\frac{15}{2}-7)}=\frac{3\times 5\times 7}{4R}$

$\Rightarrow\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{105}{4R}\Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$。

故選(5)。

4. 由題意可知 n 年後投入的研發資金為 $500(1+12\%)^n$ 萬元，

所以 $500(1+12\%)^n\geq 8000\Rightarrow(1.12)^n\geq 16$

$\Rightarrow n\times\log 1.12\geq\log 16$

$\Rightarrow n\geq\frac{4\times\log 2}{\log 1.12}=\frac{4\times 0.3010}{0.0492}\approx 24.47$

$\Rightarrow n$ 的最小值為 25，

即民國 110＋25＝135 年時，始達到所求。

故選(4)。

5. ① $P(\frac{\pi}{4},t)$ 代入 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow t=\sin(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。

② Γ_1：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$，

將 Γ_1 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，即得函數 Γ_2：$y=\sin 2x$，

所以 $s=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\geq 0$，$k\in\mathbb{Z}$，

故 s 的最小值為 $\frac{\pi}{6}$。

故選(1)。

6. 設 4 數為 $32, 32+d, 32+2d, 32+3d$

$\Rightarrow 35\leq 32+3d\leq 500$

$\Rightarrow 1\leq d\leq 156$，$d\in\mathbb{N}$

(1) 令 $91=32+d\Rightarrow d=59$（合）。

(2) 令 $190=32+2d\Rightarrow d=79$（合）。

(3) ① $348=32+d\Rightarrow d=316$（不合），

② $348=32+2d\Rightarrow d=158$（不合），

③ $348=32+3d\Rightarrow d=\frac{316}{3}$（不合），

故 348 不可能在此 4 個數中。

(4) 令 $491=32+3d\Rightarrow d=153$（合）。

(5) 令 $500=32+3d\Rightarrow d=156$（合）。

故選(3)。

二、多選題

7. (1) ○ (2) ○ (3) ○ (4) ×：

① 令圓心 $O(3,4)$ 到直線 L：$y=m(x-1)+3$ 的距離為 d，所以 $\frac{|3m-4-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$。

② 若直線 L 和圓 C 相交二點，即 $d<r$

$\Rightarrow\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}<1\Rightarrow|2m-1|<\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 4m^2-4m+1<m^2+1\Rightarrow 3m^2-4m<0$

$\Rightarrow 0<m<\frac{4}{3}$。

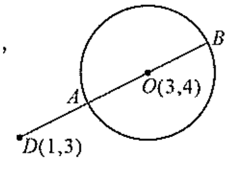
③ 又 $m=0$ 與 $m=\frac{4}{3}$ 時，直線 L 與圓 C 相切，即交一點。

(5) ○：$\overline{AB}$ 要最大，即 $\overline{AB}$ 為直徑，

即直線 L 要通過圓心 $O(3,4)$，

又直線 L 通過點 $P(1,3)$，

如右圖所示，



此時 $m=\frac{4-3}{3-1}=\frac{1}{2}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

8. (1) ○：$f(x)=3x^3-9x^2+ax+b$ 通過 $(0,2)$ 及 $(2,16)$

$\Rightarrow\begin{cases}2=b\\16=24-36+2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a=13\end{cases}$，

所以數對 $(a,b)=(13,2)$。

(2) ×：$f(x)=3x^3-9x^2+13x+2$

$=3(x^3-3x^2+3x-1)+4x+5$

$=3(x-1)^3+4(x-1)+9$，

所以 $c=4$，$d=9\Rightarrow c+d=13$。

(3) ○：由(2)可知對稱中心為 $(1,9)$。

(4) ○：① $f(2021)=3\times2020^3+4\times2020+9$，

② $f(2020)=3\times2019^3+4\times2019+9$，

即 $f(2021)>f(2020)$。

(5) ×：由(2)可知，$f(x)=3(x-1)^3+4(x-1)+9$

平移後和 $g(x)=3x^3+5x+9$ 不會重合。

故選(1)(3)(4)。

9. 設 $\langle a_n\rangle$ 的公差為 d，$\langle b_n\rangle$ 的公比為 r

$a_3+a_5=b_3\Rightarrow(1+2d)+(1+4d)=r^2\Rightarrow2+6d=r^2$ ……①

$b_2b_4=a_4\Rightarrow r\times r^3=1+3d\Rightarrow1+3d=r^4$ ……②

由①②$\Rightarrow2r^4=r^2\Rightarrow r^2=\dfrac{1}{2}$ 代回①$\Rightarrow d=-\dfrac{1}{4}$。

(1) ×：數列 $\langle a_n\rangle$ 的 $a_1=1$，$d=-\dfrac{1}{4}$，

所以數列 $\langle a_n\rangle$ 只有一種可能。

(2) ○：數列 $\langle b_n\rangle$ 的 $b_1=1$，$r=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以數列 $\langle b_n\rangle$ 有二種可能。

(3) ○：$|a_1+a_2+\cdots+a_{10}|=\left|\dfrac{10[2\times1+9\times(-\frac{1}{4})]}{2}\right|=\dfrac{5}{4}<2$。

(4) ○：$(b_1)^2+(b_2)^2+\cdots+(b_{10})^2$

$=\dfrac{1\times[1-(\frac{1}{2})^{10}]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1023}{512}<2$。

(5) ×：$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times(-\dfrac{1}{4})=-\dfrac{n}{4}+\dfrac{5}{4}\geq0$

$\Rightarrow n\leq5$，又 $a_5=0$，所以 $k=4$ 或 5。

故選(2)(3)(4)。

10. (1) ○：y 對 x 的迴歸直線必過點 $(\mu_x,\mu_y)=(60,70)$，

又由題意知也過點 $(20,40)$，

$\Rightarrow$ 斜率 $=\dfrac{70-40}{60-20}=\dfrac{3}{4}=0.75$。

(2) ×：y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y-\mu_y=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$，

所以 $r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.75\Rightarrow(0.8)\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.75$

$\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{75}{80}<1\Rightarrow\sigma_y<\sigma_x$（因為 $\sigma_x\geq0$，$\sigma_y\geq0$）。

(3) ×：$(76,84)$ 與 $(60,70)$ 所在直線的斜率，

$=\dfrac{84-70}{76-60}=\dfrac{14}{16}\neq\dfrac{3}{4}$，

所以 $(76,84)$ 不在此迴歸直線上。

(4) ○：若 $x'=ax+b$，$y'=cy+d$，$ac\neq0$，

則 $r(x',y')=\dfrac{ac}{|ac|}\times r(x,y)$，

故 $r(x',y')=-r(x,y)=-0.8$。

(5) ○：$m=r(x',y')\times\dfrac{\sigma_y'}{\sigma_x'}=(-0.8)\times\dfrac{2\sigma_y}{3\sigma_x}$

$=(-0.8)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{75}{80}<0$。

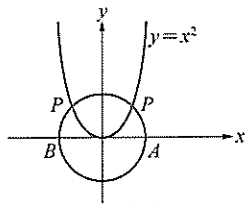
故選(1)(4)(5)。

11. 因為 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

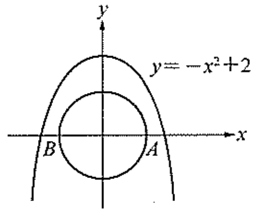
所以 P 點軌跡為以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓

故只要所求的函數圖形與此圓有交點，P 點即存在。

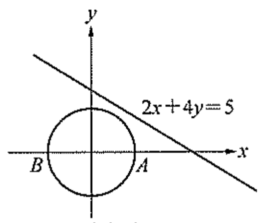
(1) ○：P 點存在。



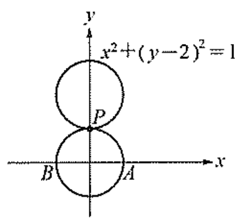
(2) ×：P 點不存在。



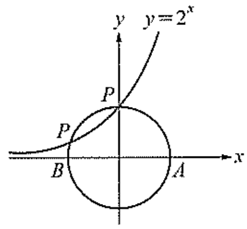
(3) ×：P 點不存在。



(4) ○：P 點存在。



(5) ○：P 點存在。



故選(1)(4)(5)。

12. 令 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，

$\vec{a}*\vec{b}=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2$

$-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2$ ……①

(1) ○：$\vec{a}*\vec{b}=\begin{vmatrix}99&100\\98&99\end{vmatrix}^2=1$。

（因為 $\begin{vmatrix}99&100\\98&99\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}1&1\\98&99\end{vmatrix}=1$。）

(2) ×：根據①可得，$\vec{a}*\vec{b}\geq0$。

(3) ○：若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Rightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

$\Rightarrow a_1b_2=a_2b_1\Rightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$

$\Rightarrow\vec{a}*\vec{b}\geq0$。

(4) ×：$\vec{a}*\vec{b}$ 的幾何意義為 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所張成平行四邊形面積的平方，又 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，

所張成面積最大的平行四邊形即為矩形，

此時面積為 $3\times4=12$，故 $\vec{a}*\vec{b}$ 最大值為 144。

(5) ×：$(2\vec{a})*(3\vec{b})=\begin{vmatrix}2a_1&2a_2\\3b_1&3b_2\end{vmatrix}^2=36\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2$

$=36(\vec{a}*\vec{b})$。

故選(1)(3)。

三、選填題

13. ① 根據題意，當 $n=2$ 時 $\Rightarrow a_2+\alpha=\dfrac{1}{2}(a_1+\alpha)$

$\Rightarrow\dfrac{7}{4}+\alpha=\dfrac{1}{2}(3+\alpha)\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-\dfrac{1}{2})$ ……(＊)

② 把(*)式依序 n 代入 3，4，可得下列各式，

$a_3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_2-\frac{1}{2})\Rightarrow a_3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{7}{4}-\frac{1}{2})\Rightarrow a_3=\frac{9}{8}$，

$a_4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_3-\frac{1}{2})\Rightarrow a_4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{9}{8}-\frac{1}{2})\Rightarrow a_4=\frac{13}{16}$，

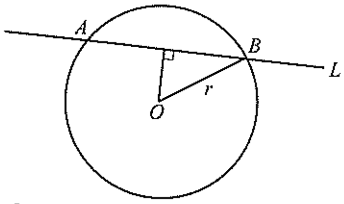
故 $a_4=\frac{13}{16}$。

14. $C：x^2+(y-a)^2=a^2+2\Rightarrow$ 圓心 $O(0,a)$，$r=\sqrt{a^2+2}$，

直線 $L：x-y+2a=0\Rightarrow d(O,L)=\frac{|0-a+2a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，

所以由畢氏定理可得 $(\frac{|a|}{\sqrt{2}})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{a^2+2})^2\Rightarrow a^2=2$，

故 $r=\sqrt{a^2+2}=\sqrt{2+2}=2$。



15. ① 如果停水 3 天集中在 2～7 日有

$(2,4,6),(2,4,7),(2,5,7),(3,5,7)$，共 4 種。

② 同理如果停水 3 天集中在 9～14 一樣有 4 種。

③ 如果停水 3 天，其中 2 天停在 2～7 日，另 1 天停在 9～14 日

(a) 2～7 日停水 2 天方法數有 $C^5_2=10$ 種。

(b) 9～14 日：1 天，有 6 種。

所以 $10\times6=60$（種）。

④ 同理如果停水 3 天，其中 1 天停 2～7 日，另 2 天停在 9～14 日，一樣有 60 種。

由①②③④可得停水方法數有 $4+4+60+60=128$（種）。

16. 設需再放入 x 顆其它顏色的球，可得下表

顏色組合	二球皆為藍色	二球皆為紅色	一球為藍色，一球為紅色	其它顏色組合
出現機率	$\frac{C^2_2}{C^{x+5}_2}$	$\frac{C^3_2}{C^{x+5}_2}$	$\frac{C^2_1\cdot C^3_1}{C^{x+5}_2}$	$\frac{C^x_2+C^5_1\cdot C^x_1}{C^{x+5}_2}$
可獲折價券金額	1800	1200	600	0

由上表可知期望值為：

$\frac{C^2_2}{C^{x+5}_2}\cdot1800+\frac{C^3_2}{C^{x+5}_2}\cdot1200+\frac{C^2_1\cdot C^3_1}{C^{x+5}_2}\cdot600+0\cdot\frac{C^x_2+C^5_1\cdot C^x_1}{C^{x+5}_2}=200$。

$\Rightarrow 1800+3600+3600=100(x+5)(x+4)$

$\Rightarrow x^2+9x-70=0\Rightarrow(x-5)(x+14)=0$

$\Rightarrow x=5$ 或 -14（不合）

所以 $x=5$，故需要再放入 5 顆不同顏色的球。

17. <法一>

因為 $\overline{DE}：\overline{EF}=2：1$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})=\frac{3}{2}[(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})]$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$。

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{2}\times1+\frac{3}{4}\times1+(-\frac{1}{4})\times1\times1\times\cos60°$

$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$。

<法二>

建立坐標系，設 $B(0,0)$，$C(1,0)$

$\Rightarrow A(\cos60°,\sin60°)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow D(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，$E(\frac{1}{2},0)$

又 $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4},0-\frac{\sqrt{3}}{4})=(\frac{3}{8},-\frac{3\sqrt{3}}{8})$

$\Rightarrow F(\frac{1}{4}+\frac{3}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8})=(\frac{5}{8},-\frac{\sqrt{3}}{8})$

$\Rightarrow\overrightarrow{AF}=(\frac{5}{8}-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(\frac{1}{8},-\frac{5\sqrt{3}}{8})$，$\overrightarrow{BC}=(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{8}\times1+(-\frac{5\sqrt{3}}{8})\times0=\frac{1}{8}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $\sin^2A+\sin^2C=\sin^2B+\sqrt{2}\sin A\cdot\sin C$

$\Rightarrow a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac\Rightarrow a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\angle B=\frac{\pi}{4}$。

故選(2)。

19. $\angle A+\angle B+\angle C=\pi\Rightarrow\angle A+\angle C=\frac{3\pi}{4}$（2 分）

$\Rightarrow\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos(\frac{3\pi}{4}-A)$

$=\sqrt{2}\cos A+(\cos\frac{3\pi}{4}\cos A+\sin\frac{3\pi}{4}\sin A)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\sin\frac{\pi}{4}\cos A+\cos\frac{\pi}{4}\sin A$

$=\sin(A+\frac{\pi}{4})$。（3 分）

故最大值為 1。（1 分）

20. 已知 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 之最大值為 1，

此時 $\angle A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{4}$，（2 分）

可得 $\angle C=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$。（2 分）