全國高中 111 年(110 學年度)高三上
第三次學測模擬考　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 請問滿足絕對值不等式$|2x-3|\le|x|$的實數x所形成的區間，
其長度為下列哪一個選項？
(1)1　(2)2　(3)3　(4)4　(5)5。

$\boxed{答}$：(2)

$\boxed{解}$：$|2x-3|^2\le|x|^2 \Rightarrow (3x-3)(x-3)\le 0 \Rightarrow 1\le x\le 3$

2. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特(w/m^2)來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為$I_0=10^{-12}(w/m^2)$；當測得的聲音強度為$I\,(w/m^2)$時，所產生的聲音分貝數d，其中$d=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$，一般人高聲說話所產生的分貝數為65，樹葉沙沙聲所產生的分貝數為20，若一般人高聲說話所產生的強度為樹葉沙沙聲所產生的強度的m倍，則m值最接近下列哪一個數值？
(1)10000　(2)20000　(3)30000　(4)40000　(5)50000

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：$65=10\times\log\dfrac{I_{人}}{I_0} \Rightarrow \dfrac{I_{人}}{I_0}=10^{6.5}$

$20=10\times\log\dfrac{I_{樹}}{I_0} \Rightarrow \dfrac{I_{樹}}{I_0}=10^{2}$

$m=\dfrac{I_{人}}{I_{樹}}=10^{4.5}=10^4\times10^{\log 3.\cdots}=3.\cdots\times10^4$

3. 已知ΔABC的三邊長為3，5，7，則該三角形的外接圓半徑為下列哪一個數？
(1)$\dfrac{5\sqrt{7}}{6}$　(2)$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　(3)$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(4)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(5)$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{答}$：(5)

$\boxed{解}$：Δ面積$=\sqrt{\dfrac{15}{2}\times\dfrac{9}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\times5\times7}{4R} \Rightarrow R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

4. 某公司為激勵創新，計畫逐年加大研發資金投入。若該公司民國110年全年投入研發資金500萬元，在此基礎上，每年投入的研發資金比上一年增長12%，則該公司全年投入的研發資金開始超過8000萬元的年份是民國幾年？($\log 1.12\approx 0.0492$，$\log 2\approx 0.3010$)
(1)126　(2)129　(3)132　(4)135　(5)138

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$500\times(1+12\%)^n>8000\ \Rightarrow 1.12^n>16=2^4$

$\Rightarrow\left(10^{\log 1.12}\right)^n>\left(10^{\log 2}\right)^4\ \Rightarrow n\times\log 1.12>4\log 2\ \Rightarrow n>\dfrac{4\times 0.3010}{0.0492}\fallingdotseq 24.4\cdots$

所求年份$=110+24.4\cdots=134.4\cdots$

5. 將函數$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$圖形上的點$P\left(\dfrac{\pi}{4},t\right)$向左平移$s\,(s>0)$個單位長，得到點$Q$，若$Q$點在函數$y=\sin 2x$的圖形上，則下列哪一個選項是正確的？
(1) $t=\dfrac{1}{2}$，s的最小值為$\dfrac{\pi}{6}$　(2) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，s的最小值為$\dfrac{\pi}{6}$
(3) $t=\dfrac{1}{2}$，s的最小值為$\dfrac{5\pi}{6}$　(4) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，s的最小值為$\dfrac{5\pi}{6}$
(5) $t=\dfrac{1}{2}$，s的最小值為$\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{答}$：(1)

$\boxed{解}$：$P\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)\in y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$Q\left(\dfrac{\pi}{4}-s,\dfrac{1}{2}\right)\in y=\sin 2x\ \Rightarrow\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2s\right)=\cos 2s\ \Rightarrow 2s=\dfrac{\pi}{3}\ \Rightarrow s=\dfrac{\pi}{6}$

6. 從1到500的正整數中挑選4個相異的數字，使這4個數由小到大排列後形成一個等差數列，已知此等差數列的首項為32，則下列哪一個數不可能出現在所挑選的4個數中？
(1)91　(2)190　(3)348　(4)491　(5)500

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：設4數為32，$32+d$，$32+2d$，$32+3d$

$\Rightarrow 35\le 32+3d\le 500\quad\Rightarrow 1\le d\le 156$，$d\in N$

(1) 令$91=32+d\ \Rightarrow d=59$(合)
(2) 令$190=32+2d\ \Rightarrow d=79$(合)
(3) ①$348=32+d\ \Rightarrow d=316$(不合)
②$348=32+2d\ \Rightarrow d=158$(不合)
③$348=32+3d\ \Rightarrow d=\dfrac{316}{3}$(不合)
故348不可能在此4個數中
(4) 令$491=32+3d\ \Rightarrow d=153$(合)
(5) 令$500=32+3d\ \Rightarrow d=156$(合)

二、多選題

7. 直角坐標平面上，直線L方程式為$y=m(x-1)+3$，其中m為實數，
圓C方程式為$(x-3)^2+(y-4)^2=1$，圓心為O點，試選出正確的選項。
(1)當$m=0$時，直線L和圓C交一點 (2)當$m=\frac{1}{3}$時，直線L和圓C交二點
(3)當$m=1$時，直線L和圓C交二點 (4)當$m=\frac{4}{3}$時，直線L和圓C交二點
(5)若直線L與圓C相交A、B兩點時，當$m=\frac{1}{2}$時，$\overline{AB}$長度最大。

答：(1)(2)(3)(5)

解：$d(0,L)=\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\le 1 \Rightarrow 0\le m\le \frac{4}{3}$

當$m=0$，$\frac{4}{3}$時，L與C交於一點，

當$0<m<\frac{4}{3}$時，L與C交於二點，

當L過$(3,4)$時，即$m=\frac{1}{2}$時，截弦長最大

8. 已知三次實係數多項式函數$f(x)=3x^3-9x^2+ax+b$的圖形通過$(0,2)$、$(2,16)$兩點，試選出正確的選項。
(1)數對$(a,b)=(13,2)$ (2)若$f(x)=3(x-1)^3+c(x-1)+d$，則$c+d=14$
(3)對稱中心點為$(1,9)$ (4)$f(2021)>f(2020)$
(5)$f(x)$的圖形平移後可與$y=g(x)=3x^3+5x+9$的圖形重合。

答：(1)(3)(4)

解：(1)$f(0)=2 \Rightarrow b=2$，又$f(2)=16 \Rightarrow a=13$
(2)$f(x)=3x^3-9x^2+13x+2=3(x-1)^3+4(x-1)+9$
故所求$c+d=4+9=13$
(3)承(2)，對稱中心$(1,9)$
(4)承(2)，知$f(x)$為嚴格增函數
(5)應與$y=g(x)=3x^3+4x+9$重合

9. 設$\langle a_n\rangle$為等差數列，$\langle b_n\rangle$為等比數列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，且$a_1=b_1=1$，$a_3+a_5=b_3$，$b_2b_4=a_4$。試問下列選項哪些是正確的？
(1)滿足題意的數列$\langle a_n\rangle$有兩種可能 (2)滿足題意的數列$\langle b_n\rangle$有兩種可能
(3)$|a_1+a_2+\cdots+a_{10}|<2$ (4)$(b_1)^2+(b_2)^2+\cdots+(b_{10})^2<2$
(5)設S_n的最大值為S_k，則$k=4$。

答：(2)(3)(4)

解：令公差 d，公比 $r \Rightarrow \begin{cases} a_3 + a_5 = b_3 \Rightarrow 2+6d = r^2 \\ b_2 b_4 = a_4 \Rightarrow 1+3d = r^4 \end{cases}$

(1)(2) $r^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$d = -\dfrac{1}{4}$

(3)原式 $= \left|1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}+0-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{4}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{4}+\dfrac{5}{4}\right| = \dfrac{5}{4} < 2$

(4)原式 $= \dfrac{1\left[1-\left(r^2\right)^{10}\right]}{1-r^2} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{10}}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1023}{512} < 2$

(5)承(3)，$k=4$ 或 5 時，S_k 有最大值 $= \dfrac{5}{2}$

10. 有 30 筆數據 $\left(x_i, y_i\right)$，$i=1,2,\cdots,30$，其中平均數 $\mu_x = 60$，$\mu_y = 70$，x 與 y 的相關係數為 0.8，且 y 對 x 的迴歸直線方程式通過點 $\left(20,40\right)$，試問下列敘述哪些是正確的？
(1) y 對 x 的迴歸直線斜率為 0.75
(2) x 的標準差小於 y 的標準差
(3) y 對 x 的迴歸直線通過另一點 $\left(76,84\right)$
(4)若 $x_i' = 3x_i + 2$，$y_i' = -2y_i + 10$，則 x' 與 y' 的相關係數為 -0.8
(5)承(4)，y' 對 x' 的迴歸直線斜率為負數。

答：(1)(4)(5)

解：(1) $m = \dfrac{70-40}{60-20} = \dfrac{3}{4}$

(2) $m = r \times \dfrac{S_y}{S_x} \Rightarrow \dfrac{S_y}{S_x} = \dfrac{0.75}{0.8} < 1$

(3)迴歸直線：$\left(y-70\right) = \dfrac{3}{4}\left(x-60\right)$ 通過 $\left(76,82\right)$

(4) $r_{x'y'} = r_{(3x+2,\,-2y+10)} = r_{(x,\,-y)} = -r_{xy} = -0.8$

(5) m' 與 $r_{x'y'}$ 同號

11. 在平面直角坐標系中，若 $A\left(1,0\right)$、$B\left(-1,0\right)$，則下列哪些函數的圖形上可以找到 P 點，使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$
(1) $y = x^2$　(2) $y = -x^2 + 2$　(3) $2x + 4y = 5$　(4) $x^2 + \left(y-2\right)^2 = 1$　(5) $y = 2^x$。

答：(1)(4)(5)

解：以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓為 $x^2 + y^2 = 1$
與(1)(4)(5)有交點，與(2)(3)無交點

12. 設$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$為平面上的二個非零向量，

定義一個新的運算為：$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2$，

試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{a}=(99,100)$、$\overrightarrow{b}=(98,99)$，則$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=1$

(2)對所有的$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}\geq 1$

(3)若$\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，則$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=0$

(4)若$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$，則$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}$的最大值為12

(5) $\left(2\overrightarrow{a}\right)*\left(3\overrightarrow{b}\right)=6\left(\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}\right)$。

答：(1)(3)

解：$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta$

$=\left(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta\right)^2=\left(\overrightarrow{a}、\overrightarrow{b}\text{張拓之平行四邊形面積}\right)^2$

(1) $\begin{vmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 99 & 1 \\ 98 & 1 \end{vmatrix}^2=1$

(2)不一定

(3)正確

(4) $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin 90^\circ=3\times 4\times 1=12$

(5)應為$\left(2\overrightarrow{a}\right)*\left(3\overrightarrow{b}\right)=2^2\times 3^2\left(\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}\right)$

三、選填題

13. 有一數列〈a_n〉滿足遞迴關係式$\begin{cases} a_1=3\text{ , }a_2=\dfrac{7}{4} \\ a_n+\alpha=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\alpha\right)\text{ , }n\geq 2 \end{cases}$，其中$\alpha$是常數，

則$a_4=$________。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{13}{16}$

解：$a_2+\alpha=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\alpha\right)\xrightarrow{a_1=3\text{, }a_2=\frac{7}{4}}\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$a_4-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow a_4=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{16}$

14. 設直線$y=x+2a$與圓C：$x^2+y^2-2ay-2=0$相交於A、B兩點，若$\overline{AB}=2\sqrt{3}$，則圓C的半徑為________。

答：2

解：圓C：$(x-0)^2+(y-a)^2=a^2+2$，L：$x-y+2a=0$

$d(0,L)=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2} \Rightarrow \frac{|0-a+2a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(a^2+2\right)-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$\Rightarrow a^2=2\left(a^2-1\right) \Rightarrow a^2=2$，半徑$=\sqrt{a^2+2}=2$

15. 全台因為缺水問題需要停水，以下為15天內的停水計劃，如下表，月曆上1至15天，要規劃其中3天停水，為了民眾生活的便利性，停水的3天皆要不相鄰，且第1天，第8天，第15天也不能停水，例如：可停2，4，6或者3，7，9…等等。試問有________種停水方式。

月曆	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
停水	╳							╳							╳

答：128

解：三天皆在前區或後區 $\Rightarrow C_3^4\times 2=8$（利用插空隙）

三天分成$(2+1)$在前後區 $\Rightarrow C_2^5\times C_1^6\times 2=120$

合計：$8+120=128$(種)

16. 有一百貨公司舉辦週年慶滿額抽獎活動，遊戲規則如下：參加者自箱中一次抽出兩球，確定顏色後放回。其顏色組合及可得金額如下表所列：

顏色組合	二球皆為藍色	二球皆為紅色	一球為藍色，一球為紅色	其它顏色組合
可獲折價券金額	1800(元)	1200(元)	600(元)	0(元)

已知箱中置有2顆藍色球及3顆紅色球，在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得折價券金額的期望值為200元，則主辦單位應於箱內再放入________顆其他顏色的球。

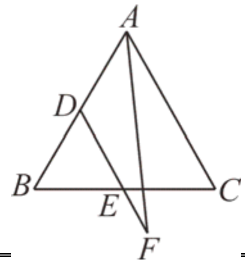
答：5

解：

A	二藍	二紅	一藍一紅	其他
P	$\frac{C_2^2}{C_2^{n+5}}$	$\frac{C_2^3}{C_2^{n+5}}$	$\frac{C_1^2C_1^3}{C_2^{n+5}}$	
\$	1800	1200	600	0

$E(X)=\frac{1}{C_2^{n+5}}\left[1800\times 1+1200\times 3+600\times 6\right]=200 \Rightarrow n=5$

17. 如圖，ΔABC是邊長為1的正三角形，點D、E分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中點，F點在DE直線上，且$\overline{DE}=2\overline{EF}$，試求$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=$________。（化為最簡分數）



答：$\dfrac{1}{8}$

解：$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right]\cdot\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{3}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{1}{2}\times1^2+\frac{3}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{8}$$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

在 ΔABC 中，$\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B+\sqrt{2}\sin A\sin C$，試回答下列問題：

18. $\angle B$ 的大小為多少弧度？（單選題）

(1)$\dfrac{\pi}{6}$　(2)$\dfrac{\pi}{4}$　(3)$\dfrac{\pi}{3}$　(4)$\dfrac{3\pi}{4}$　(5)$\dfrac{5\pi}{6}$。

答：(2)

解：由正弦定律，原式$\Rightarrow a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$

由餘弦定律，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle B=\dfrac{\pi}{4}$

19. 試求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值。

答：1

解：$\sqrt{2}\cos A+\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-A\right)=\sqrt{2}\cos A+\cos A\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)+\sin A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A+\cos A)=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\le1$$

20. 承 19.，當 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 有最大值時，$\angle C=$ ？

答：$\dfrac{\pi}{2}$

解：當 $A+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$C=\dfrac{\pi}{2}$ 時，有 $Max=1$