全國公私立高級中學 111 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 A 考科解析

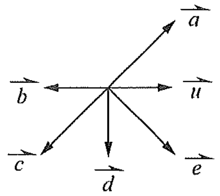
考試日期：111 年 10 月 26~27 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	12-3	12-4
3	4	2	5	4	4	234	1235	34	25	235	9	6	2	5
13-1	13-2	14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	17-1
3	4	9	0	1	0	0	7	4	0	2	2	4	5	4
17-2	17-3	18	19	20										
2	0	4												

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 展開得 $x^2-36\le 18\sqrt{3} \Rightarrow x^2\le 36+18\sqrt{3}$
$\Rightarrow |x|\le\sqrt{36+18\sqrt{3}}=3\sqrt{4+2\sqrt{3}}=3(\sqrt{3}+1)$
$\Rightarrow -8.1\approx -3(\sqrt{3}+1)\le x\le 3(\sqrt{3}+1)\approx 8.1$，
所以 $x=-8,-7,\cdots\cdots,-1,0,1,\cdots\cdots,8$，共 17 個，
故選(3)。
2. $y=2x^3-6x^2+2x+5=2(x-1)^3-4(x-1)+3$，中心 $(1,3)$
從中心 $(1,3)$ 到中心 $(5,4)$ 為右移 4 單位，
再向上移 1 單位，即 $h=4$，$k=1$
$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d=2(x-5)^3-4(x-5)+4$
$=2x^3-30x^2+146x-226$
$\Rightarrow a=2$，$b=-30$，$c=146$，$d=-226$，
故選(4)。
3. 依向量定義，繪示意圖如下：



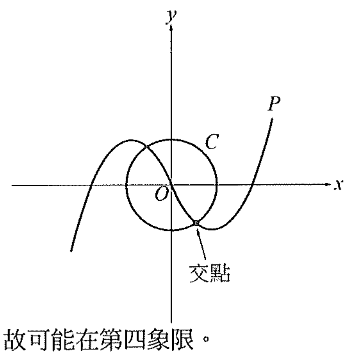
故選(2)。
4. 因為 $\log[\log(2^{(3^5)})]=\log[3^5\cdot\log 2]=\log 3^5+\log(\log 2)$
$=5\cdot\log 3+\log(\log 2)$，
故選(5)。
5. $3^{200}=9^{100}=[10+(-1)]^{100}$
$=C_0^{100}-C_1^{100}10+C_2^{100}10^2-C_3^{100}10^3+\cdots$
$=1-1000+495000-C_3^{100}10^3+\cdots$
$=1+1000(-1+495-C_3^{100}+\cdots)$，
3^{200} 的末三位為 001 $\Rightarrow a$ 的末三位為 978，
故選(4)。
6. 因為一定會點其中一種套餐，
故討論 A，B 套餐與是否更換飲品且滿足低消即可。
在滿足低消 350 元的條件下，共有以下可能：

狀況	主餐可能	飲料可能	所有可能
① A 套餐＋不換飲料	1	2	1×2＝2
② B 套餐＋不換飲料	5	2	5×2＝10
③ A 套餐＋換飲料	飲料選 80 元：3	2	3×2＋5×2＝16
	飲料選 120 元：5	2	
④ B 套餐＋換飲料	5	4	5×4＝20

共計 2＋10＋16＋20＝48（種），
故選(4)。

二、多選題

7. 由題意，設 $f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2x+3$。
(1) ×：餘式 $=f(-2)=0+2(-2)+3=-1$。
(2) ○：餘式 $=[f(-2)]^2=(-1)^2=1$。
(3) ○：設餘式為 $ax+b$，
則 $[f(x)]^2=(x-1)(x+2)q(x)+ax+b$，
因為 $\begin{cases}[f(-2)]^2=1=-2a+b\\ [f(1)]^2=25=a+b\end{cases}$
$\Rightarrow$ 解聯立得 $a=8$，$b=17$，
故餘式為 $8x+17$。
(4) ○：由(1)可知，$f(x)=(x+2)q_2(x)+(-1)$
$\Rightarrow (x-1)f(x)=(x-1)(x+2)q_2(x)+(-1)(x-1)$，
故餘式為 $-x+1$。
(5) ×：同理，由 $f(x)=(x-1)q_3(x)+5$
$\Rightarrow (x+2)f(x)=(x-1)(x+2)q_3(x)+5(x+2)$，
故餘式為 $5x+10$。
故選(2)(3)(4)。
8. (1) ○：$a=-1$ 時，$y=x^3-x=x(x+1)(x-1)$，
通過 $(-1,0)$，$(0,0)$，$(1,0)$，
故有三個交點。
(2) ○：$a=-\frac{3}{4}$ 時，$y=x^3-\frac{3}{4}x$，令 $x=\cos 20°$ 代入，
則 $y=\cos^3 20°-\frac{3}{4}\cos 20°=\frac{1}{4}(4\cos^3 20°-3\cos 20°)$
$=\frac{1}{4}\cos 60°=\frac{1}{8}$，
故通過 $(\cos 20°,\frac{1}{8})$。
(3) ○：當 $a=-4$ 時，Γ：$y=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$
與 C 之圖形如下：



故可能在第四象限。
(4) ×：因 $y=x^3+ax$ 之圖形對稱於原點 $(0,0)$，
故若 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 為一交點，
則另一交點為 $(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta))$，
即為 $(-\cos\theta,-\sin\theta)$。

(5) ○：因 $y=x^3+ax$ 在 $x=0$ 之局部近似為 $y=ax$，

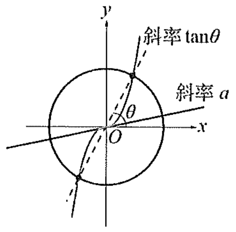
故 a 為一次近似直線之斜率值，且 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

表交點 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 與原點之斜率值。

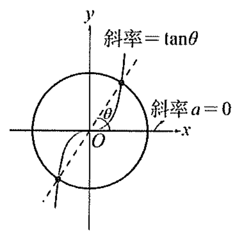
以圖形討論如下：

(Ⅰ) 若 $a>0$，則圖形如圖(一)，得 $\tan\theta>a$。

(Ⅱ) 若 $a=0$，則圖形如圖(二)，得 $\tan\theta>0=a$。

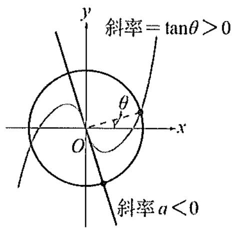


圖(一)

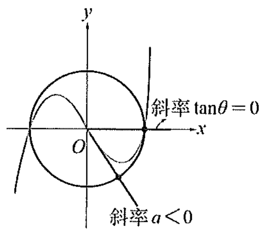


圖(二)

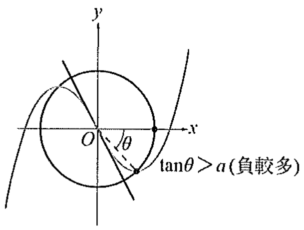
(Ⅲ) 若 $a<0$，則圖形可能為圖(三)、圖(四)、圖(五)，得 $\tan\theta>a$。



圖(三)



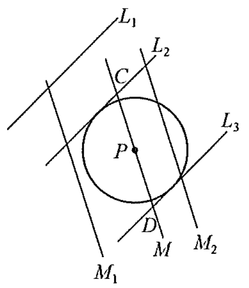
圖(四)



圖(五)

故選(1)(2)(3)(5)。

9. 圓 Γ 半徑 $r=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$。



(1) ×：$L_1：x-y+17=0$ 與

$L_2：x-y+7=0$ 的距離為

$\dfrac{|17-7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}\neq 2r$，

L_2、L_3 的距離為

$\dfrac{|7+13|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=10\sqrt{2}=2r$，

故 L_2、L_3 是圓 Γ 的切線，L_1 不是圓 Γ 的切線。

(2) ×：直線 M 和直線 M_1 平行且兩線相距為

$\dfrac{27}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{729}{10}}=\sqrt{72.9}>r=\sqrt{50}$，

故直線 M_1 和圓 Γ 不相交。

(3) ○：直線 M 和直線 M_2 平行且兩線相距為

$\dfrac{15}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{225}{10}}=\sqrt{22.5}<r=\sqrt{50}$，

故直線 M_2 是圓 Γ 的割線。

(4) ○：直線 M 和直線 L_2, L_3 的交點分別為

$C\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{11}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{19}{2}\right)$，

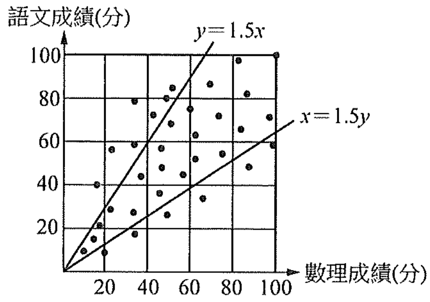
圓心為 $\overline{CD}$ 中點 $P(1,-2)$，

$\overline{AP}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=r\Rightarrow A$ 點在圓 Γ 上。

(5) ×：$\overline{BP}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}>r\Rightarrow B$ 點在圓 Γ 外。

故選(3)(4)。

10. 設數理成績為 x、語文成績為 y。



(1) ×：「偏數理」為 $x\geq 1.5y$ 的學生，為在直線 $x=1.5y$ 上及其右半平面，計有 6 位學生。

(2) ○：「偏語文」為 $y\geq 1.5x$ 的學生，為在直線 $y=1.5x$ 上及其左半平面，計有 7 位學生。

(3) ×：明顯錯誤。

(4) ×：「偏數理」的學生其數理成績的中位數小於 60 分；「偏語文」的學生其語文成績的中位數大於 70 分。

(5) ○：「偏數理」的學生其數理成績的差異比「偏語文」的學生其語文成績的差異大，故「偏數理」的學生其數理成績的標準差大於「偏語文」的學生其語文成績的標準差。

故選(2)(5)。

11. $y=h(x)=f(x)+g(x)=2\sin 3x+2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin 3x+2\left(\cos 3x\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin 3x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right)$

$=2\left(\sin 3x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 3x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1) ×：$h(1)=2\sin\left(3+\dfrac{\pi}{3}\right)\approx 2\sin 4.04<0$。

(因為 $\pi<4.04<\dfrac{3\pi}{2}\approx 4.71$)

(2) ○：$h(2)=2\sin\left(6+\dfrac{\pi}{3}\right)\approx 2\sin 7.04>0$。

(因為 $2\pi<7.04<2\pi+\dfrac{1}{2}\pi\approx 7.85$)

(3) ○ (4) ×：$y=h(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最大值為 2，

週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$。

(5) ○：將 $y=f(x)=2\sin 3x$ 左移 $\dfrac{\pi}{9}$ 單位可得

$y=h(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$。

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

12. 編號 1, 2, 3, 4 球的取球機率比為

$\dfrac{1}{1}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}=12:6:4:3$，

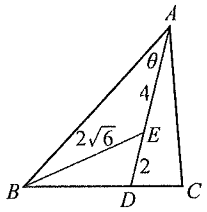
故取球機率分別為 $\dfrac{12}{25}$, $\dfrac{6}{25}$, $\dfrac{4}{25}$, $\dfrac{3}{25}$。

取一球的期望值為

$1\times\dfrac{12}{25}+2\times\dfrac{6}{25}+3\times\dfrac{4}{25}+4\times\dfrac{3}{25}=\dfrac{48}{25}$，

故所求為 $\dfrac{48}{25}\times 2=\dfrac{96}{25}$。

13. 依題意繪圖如右，
$3x=6y=4z \Rightarrow x:y:z=4:2:3$
$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{DE}=x:y=4:2$，
又 $\overline{AD}=6 \Rightarrow \overline{AE}=4$，$\overline{DE}=2$，
$\overline{BE}$ 是 $\angle ABC$ 的平分線
$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{DE}=2:1$。
設 $\overline{AB}=2k$，$\overline{BD}=k$，
在 $\triangle ABD$，$\triangle ABE$ 中，



$$\frac{(2k)^2+6^2-k^2}{2\times 2k\times 6}=\cos\theta=\frac{(2k)^2+4^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times 2k\times 4}$$

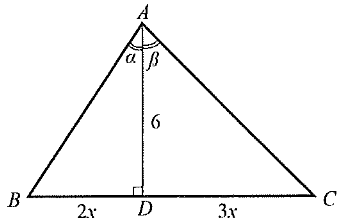
$\Rightarrow k=4 \Rightarrow \overline{AB}=8$，$\overline{BD}=4$，
$\overline{BD}:\overline{CD}=\triangle ABD:\triangle ACD=(x+y):z=6:3 \Rightarrow \overline{CD}=2$，
在 $\triangle ABD$，$\triangle ABC$ 中，

$$\frac{8^2+4^2-6^2}{2\cdot 8\cdot 4}=\cos\angle ABC=\frac{8^2+6^2-\overline{AC}^2}{2\cdot 8\cdot 6} \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{34}$$ 。

14. 由 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=2:3$。
設 $\overline{BD}=2x$，$\overline{CD}=3x$，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，
則 $\tan(\alpha+\beta)=\tan 135°=-1$

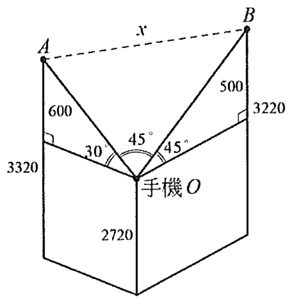
$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-1 \Rightarrow \frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{2}}=-1$$

$\Rightarrow x=6$ 或 -1（不合），
所以 $\overline{BC}=30$，故面積 $=\frac{1}{2}\times 6\times 30=90$。



15. 設手機位置為 O 點，
由仰角 30° 可知 $\overline{OA}=\frac{600}{\sin 30°}=1200$，
由仰角 45° 可知 $\overline{OB}=\frac{500}{\sin 45°}=500\sqrt{2}$，
故由 $\triangle OAB$ 中，餘弦定理可知，

$$\overline{AB}=\sqrt{1200^2+(500\sqrt{2})^2-2\times 1200\times 500\sqrt{2}\times\cos 45°}$$
$$=\sqrt{740000}=100\sqrt{74}$$ 。

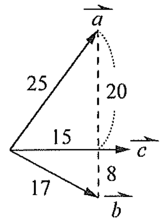


16. 因為 12 秒 $=\frac{1}{5}$ 分鐘，

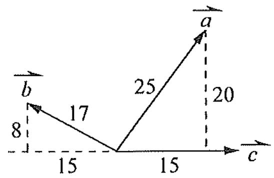
$$\text{則}\begin{cases} t=0，f(0)=2.6 \Rightarrow a+b=2.6 \cdots\cdots ① \\ t=\frac{1}{5}，f(\frac{1}{5})=1.4 \Rightarrow a+b\times 2^{-\frac{c}{5}}=1.4 \cdots\cdots ② \\ t=\frac{2}{5}，f(\frac{2}{5})=0.8 \Rightarrow a+b\times 2^{-\frac{2c}{5}}=0.8 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－②：$b(1-2^{-\frac{c}{5}})=1.2 \cdots\cdots ④$
②－③：$b(2^{-\frac{c}{5}}-2^{-\frac{2c}{5}})=0.6$
$\Rightarrow b\cdot 2^{-\frac{c}{5}}(1-2^{-\frac{c}{5}})=0.6 \cdots\cdots ⑤$
$\frac{④}{⑤}$：$2^{\frac{c}{5}}=2 \Rightarrow c=5$ 代回④ $\Rightarrow b=2.4 \Rightarrow a=0.2$，
故 $(a, b, c)=(0.2, 2.4, 5)$。

17. 若 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 夾銳角，則 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所圍的平行四邊形面積為最大時，為圖(一)或圖(二)情況，兩圖的平行四邊形全等，面積均為 $[(20+8)\times 15\times\frac{1}{2}]\times 2=420$（所圍△面積的 2 倍）。



圖(一)



圖(二)

若 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 夾鈍角，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所圍的平行四邊形面積最大仍為 420，所求＝420。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 在 A_4 的基礎上增加 $10\times 2+7\times 2=34$ 根「｜」棒子。
故選(4)。
19. A_{10} 是 $(2\times 9+1)^2=19^2$ 個正方格，
共用了 $19\times 20=380$ 根「｜」棒子。（3 分）
共用了 $17^2=289$ 根「＼」棒子。（3 分）
20. ＜法一＞
A_{10} 一共用了 $380\times 2+289=1049$ 根棒子。（2 分）
A_9 是 $(2\times 8+1)^2=17^2$ 個正方格，
用了 $17\times 18=306$ 根「｜」棒子與 $15^2=225$ 根「＼」棒子。
故 A_9 一共用了 $306\times 2+225=837$ 根棒子。（2 分）
A_{10} 一共比 A_9 多用了 $1049-837=212$ 根棒子。（2 分）
＜法二＞
A_{10} 是 $(2\times 9+1)^2=19^2$ 個正方格，故
A_{10} 一共比 A_9 多用了 $20\times 2+17\times 2=74$ 根「｜」棒子。（2 分）
A_{10} 一共比 A_9 多用了 $17^2-15^2=64$ 根「＼」棒子。（2 分）
A_{10} 一共比 A_9 多用了 $74\times 2+64=212$ 根棒子。（2 分）