數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(1)	(3)	(3)	(5)	(4)	(1)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)(4)	(1)(2)	(1)(3)(5)	(4)(5)	(1)(2)(5)		

第壹部分、選擇（填）題
一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：常用對數的應用、常用對數的性質

解析：$\begin{cases} \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 4 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-4} \\ \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 5 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-5} \end{cases}$

混合比例 1：2，混合後的 $[\text{H}^+]$ 為

$\frac{1}{3}\times10^{-4}+\frac{2}{3}\times10^{-5}=\frac{1}{3}\times10^{-5}(10+2)=4\times10^{-5}$

則混合後

$\text{pH}=-\log[\text{H}^+]=-\log(4\times10^{-5})$

$=-(-5+\log 4)=5-\log 4$

$=5-2\times\log 2$

$\approx 5-0.6020=4.3980$

≈ 4.4

故選(2)。

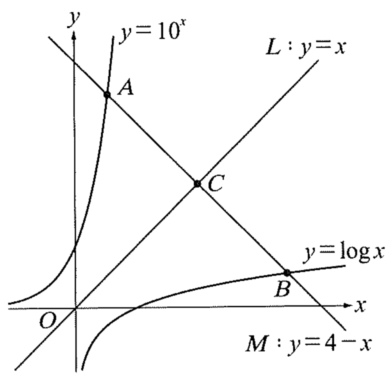
2. (1)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指對數函數圖形與對稱性

解析：$\begin{cases} 10^{\alpha}=4-\alpha \\ \log\beta=4-\beta \end{cases}$，如下圖可知 $A=(\alpha, 10^{\alpha})=(\alpha, 4-\alpha)$，

$B=(\beta, \log\beta)=(\beta, 4-\beta)$



故 A、B 兩點均在直線 M：$y=4-x$ 上

因 $y=10^x$ 與 $y=\log x$ 的圖形對稱直線 L：$y=x$，

故 $\overline{AB}$ 的中點 C 為直線 L 與 M 的交點

$\Rightarrow C$：$\begin{cases} y=x \\ y=4-x \end{cases}$ 且 $C=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{10^{\alpha}+\log\beta}{2}\right)$

（$\overline{AB}$ 的中點）

$\Rightarrow C=(2, 2)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{10^{\alpha}+\log\beta}{2}\right)$

$\Rightarrow 2=\frac{10^{\alpha}+\log\beta}{2}$

$\Rightarrow 10^{\alpha}+\log\beta=4$

故選(1)。

3. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：熟悉期望值的計算

解析：$E=0\times\frac{C^6_0C^5_4}{C^{11}_4}+1\times\frac{C^6_1C^5_3}{C^{11}_4}+2\times\frac{C^6_2C^5_2}{C^{11}_4}+3\times\frac{C^6_3C^5_1}{C^{11}_4}$

$+4\times\frac{C^6_4C^5_0}{C^{11}_4}$

$=\frac{24}{11}\approx 2.18$

故選(3)。

4. (3)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列的和

解析：$a_1=\frac{1010\times991}{2}$，$a_2=\frac{1010\times989}{2}$，$a_3=\frac{1010\times987}{2}$，

……，$a_{50}=\frac{1010\times893}{2}$

則 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{50}=\frac{1010}{2}\times\frac{50(991+893)}{2}$

$=\frac{1}{4}\times1010\times50\times1884$

$=23785500=10^L$

$<3\times10^7<\sqrt{10}\times10^7=10^{7.5}$

故 L 最接近整數 7

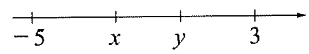
故選(3)。

5. (5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值

解析：所求即為 x 到 -5，y 到 3，x 到 y 距離和



當 $-5\le x\le y\le 3$，如上圖所示

$|x+5|+|y-3|+|x-y|=3-(-5)=8$ 為最小值

故選(5)。

6. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

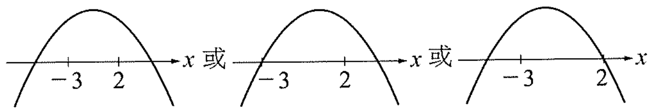
目標：二次不等式

解析：$x^2+x-6<0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)<0$

$\Rightarrow -3<x<2$

令 $y=f(x)=-x^2-kx+12$ 的圖形可能為



滿足上面三個圖的條件為

$f(-3)\ge 0$ 且 $f(2)\ge 0$

$\begin{cases} -9+3k+12\ge 0 \\ -4-2k+12\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3k\ge -3 \\ 2k\le 8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k\ge -1 \\ k\le 4 \end{cases}$

$\Rightarrow -1\le k\le 4$

k 可以為 -1，0，1，2，3，4，共 6 個

故選(4)。

二、多選題

7. (1)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：數與式的應用

解析：(1) ○：若 $a+b$ 為有理數

則 $(a+b)-a=b$ 為有理數(矛盾)

$\therefore a+b$ 為無理數

(2) ╳：設 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，$d=1+\sqrt{2}$

則 $a+c=b+d$，但 $a\neq b$ 且 $c\neq d$

(3) ╳：$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$

$=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$

$=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$

(4) ╳：$\dfrac{a+2b}{2}\geq\sqrt{2ab}$

等號成立時 $a=2b$

(5) ○：$a<0$、$b<0\Rightarrow -a>0$、$-b>0$

$\dfrac{-a-b}{2}\geq\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$

故選(1)(5)。

8. (2)(3)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

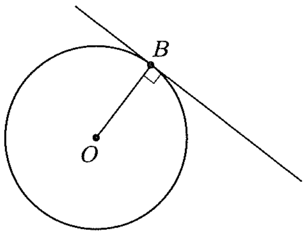
目標：圓與直線的應用

解析：(1) ╳：$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$

圓心 $O(1,2)$，半徑 $r=5$

(2) ○：$4^2+6^2-2\times4-4\times6-20=0$

B 點在圓 C 上



$m_{\overline{OB}}=\dfrac{4}{3}$，切線 $m=-\dfrac{3}{4}$

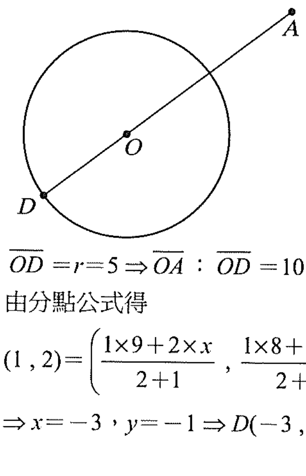
直線方程式為 $y-6=-\dfrac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 3x+4y-36=0$

(3) ○：$\overline{OA}=\sqrt{(9-1)^2+(8-2)^2}=10>r$

A 點在圓外

令最遠點 $D(x,y)$



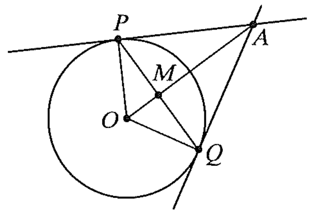
$\overline{OD}=r=5\Rightarrow\overline{OA}:\overline{OD}=10:5=2:1$

由分點公式得

$(1,2)=\left(\dfrac{1\times9+2\times x}{2+1},\dfrac{1\times8+2\times y}{2+1}\right)$

$\Rightarrow x=-3$，$y=-1\Rightarrow D(-3,-1)$

(4) ○：



作 $\overline{PQ}$ 交 $\overline{OA}$ 於 M，$\overline{PQ}\perp\overline{OA}$

$\overline{PQ}=2\overline{PM}$

$\triangle APO$ 中

$\overline{OP}=5$，$\overline{OA}=10$，$\angle APO=90^\circ$

$\overline{AP}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PM}\times\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{AP}$

$\overline{PM}=\dfrac{5\times5\sqrt{3}}{10}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\overline{PQ}=2\overline{PM}=5\sqrt{3}$。

〔另解〕

$\overline{OA}=10$，$\overline{OP}=5$，得 $\overline{AP}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$

可知 $\triangle AOP$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 直角三角形

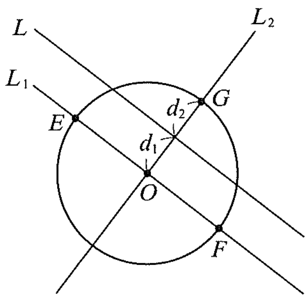
故 $\angle OAP=30^\circ$

$\Rightarrow\angle PAQ=\angle QPA=\angle PQA=60^\circ$

可知 $\triangle APQ$ 為正三角形

故 $\overline{PQ}=\overline{AP}=5\sqrt{3}$。

(5) ╳：



過 O 作 $L_1 // L$ 交圓 C 於 E、F，則 L_1 與 L 的距離為 $d_1=\dfrac{|6\times1+8\times2-47|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{5}{2}$

過 O 作 $L_2\perp L$ 交圓 C 於 G，則 G 與 L 的距離為 $d_2=r-d_1=\dfrac{5}{2}$

E、F、G 與 L 距離皆為 $\dfrac{5}{2}$，共有 3 點

故選(2)(3)(4)。

9. (1)(2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：判斷相關係數與散布圖的關係

解析：圖㈠，圖㈡為平移關係，$r_1=r_2>0$

圖㈤為對稱圖形，$r_5=0$

圖㈢較集中，r_3 最大

圖㈣較分散，r_4 較小且大於 0

因此 $r_3>r_1=r_2>r_4>r_5=0$

故選(1)(2)。

10. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：熟悉最適合直線的性質

解析：(1) ○：L 必通過 $(\mu_x,\mu_y)=(17,10)$

(2) ╳：$-1\le r\le 1$

(3) ○：因為 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=1.8$

且 $\dfrac{\mu_x\sigma_x}{\mu_y\sigma_y}=\dfrac{17}{10}\cdot\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=\dfrac{17}{10}\cdot\dfrac{r}{1.8}$

$\le\dfrac{17}{10}\cdot\dfrac{10}{18}<1$

故 $\mu_x\sigma_x<\mu_y\sigma_y$

(4) ╳：$\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{1.8}{r}\ge\dfrac{1.8}{1}>1\Rightarrow\sigma_y>\sigma_x$

(5) ○：$(27,28)$，$(17,10)$ 兩點形成斜率為 1.8 的直線

且 $(17,10)$ 在 L 上，所以 $(27,28)$ 也在 L 上

故選(1)(3)(5)。

11. (4)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦的疊合與函數圖形

解析：(1) ╳：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$，

因 $-1\le\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$，

故 $2-\sqrt{2}\le f(x)\le 2+\sqrt{2}$

(2) ╳：週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(3) ╳：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(3\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)+2$

故應為向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 單位，再向上平移 2 單位

(4) ○：因廣義角 $3-\dfrac{\pi}{4}$ 終邊在第二象限

故 $\sin\left(3-\dfrac{\pi}{4}\right)>0\Rightarrow f(1)>2$

(5) ○：$f\left(\dfrac{11\pi}{12}-\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-3\theta\right)+2$

$=\sqrt{2}\cos 3\theta+2$

$f\left(\dfrac{11\pi}{12}+\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+3\theta\right)+2$

$=\sqrt{2}\cos 3\theta+2$

所以 $f\left(\dfrac{11\pi}{12}-\theta\right)=f\left(\dfrac{11\pi}{12}+\theta\right)$，

故 $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{11\pi}{12}$

〔另解〕

因為 $f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(3\times\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)+2=2+\sqrt{2}$

恰為 $f(x)$ 的最大值(波峰)

故圖形對稱於直線 $x=\dfrac{11\pi}{12}$

故選(4)(5)。

12. (1)(2)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：共線定理與面積比

解析：(1) ○：設 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=t\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{t}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{4}\overrightarrow{AC}$

又 B、D、C 三點共線

$\therefore\dfrac{t}{3}+\dfrac{t}{4}=1\Rightarrow t=\dfrac{12}{7}$

$\therefore\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{12}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{12}{7}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overline{BD}:\overline{CD}=3:4$

(2) ○：承(1)，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{12}{7}\overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow\overline{AP}:\overline{AD}=7:12$

(3) ╳：設 $\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{AE}$，則因

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}r\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

又 C、P、E 三點共線

$\therefore\dfrac{1}{3}r+\dfrac{1}{4}=1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}r=\dfrac{3}{4}\Rightarrow r=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow\overline{AE}:\overline{BE}=4:5$

(4) ╳：$\triangle ACP$ 面積 $=\dfrac{7}{12}\times\triangle ACD$ 面積

$=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{4}{7}\times\triangle ABC$ 面積

$=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 面積

(5) ○：$\triangle AED$ 面積 $=\dfrac{4}{9}\times\triangle ABD$ 面積

$=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{7}\times\triangle ABC$ 面積

$=\dfrac{4}{21}\triangle ABC$ 面積

故選(1)(2)(5)。

三、選填題

13. $\dfrac{79}{3}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：操作與觀察數列的規律

解析：$\langle c_n\rangle$：$\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{5}=\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{4}=\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{1}$，……

前 21 項和為 $\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{3}{2}\right)\times 9=\dfrac{79}{3}$。

14. 128

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：閱讀理解

解析：上、下聯的第二、四、六個字的平仄僅有 2 種可能，

①上：□平□仄□平仄

　下：□仄□平□仄平

②上：□仄□平□仄仄

　下：□平□仄□平平

故 $2\cdot 2^6=128$ (種)。

15. 8

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數

解析：$a=2$，$-\dfrac{b}{3a}=-1\Rightarrow b=6$

$f(x)=2x^3+6x^2+cx+d$

連續利用綜合除法求 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近的一次近似

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & +6 & +c & +d & -2\\
 & -4 & -4 & +(-2c+8) & \\
\hline
2 & +2 & +(c-4) & +(d-2c+8) & \\
 & -4 & +4 & & \\
\hline
2 & -2 & +c & & \\
 & -4 & & & \\
\hline
2 & -6 & & &
\end{array}$$

$y=c(x+2)+(d-2c+8)=cx+d+8$

和 $y=3x+5$ 比較得 $c=3$，$d=-3$

所求 $a+b+c+d=2+6+3+(-3)=8$。

16. $3+3\sqrt{3}$

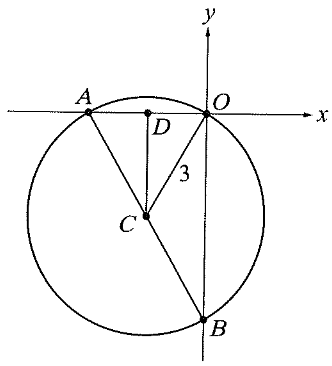
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的性質

解析：令圓與 x 軸交於 O，A，與 y 軸交於 O，B，且 D 為 $\overline{OA}$ 中點，圓心 C，半徑 r

$\angle AOB=90^\circ\Rightarrow\overline{AB}$ 為直徑

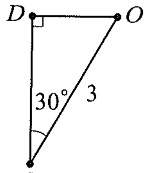
$\pi+2\pi=2\pi r\times\dfrac{1}{2}\Rightarrow r=3$



$\overset{\frown}{OB}=2\overset{\frown}{OA}\Rightarrow\angle OCB=2\angle OCA$

又 $\angle OCB+\angle OCA=180^\circ$

$\therefore\angle OCA=60^\circ$，$\angle OCD=30^\circ$



故 $\overline{OD}=\dfrac{3}{2}$，$\overline{CD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，可得 $C\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

圓 $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=3^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+3x+3\sqrt{3}\,y=0$

故 $d=3$，$e=3\sqrt{3}$，$f=0$

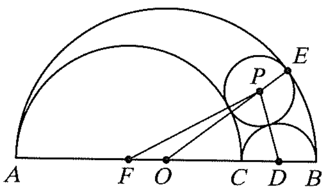
所求 $d+e+f=3+3\sqrt{3}+0=3+3\sqrt{3}$。

17. $\dfrac{12}{13}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理的運用

解析：設 O、D、F 分別為 $\overline{AB}$ 半圓、$\overline{BC}$ 半圓、$\overline{AC}$ 半圓的圓心，P 為所求圓的圓心，所求半徑為 r



則 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{AC})=1$

$\overline{OD}=\overline{OB}-\overline{BD}=4-1=3$

$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{AF}=4-3=1$

$\because$若兩圓相切，則切點與兩圓圓心共線

$\therefore\overline{OP}=\overline{OE}-\overline{PE}=4-r$，$\overline{FP}=3+r$，$\overline{PD}=1+r$

且 $\cos\angle POF=-\cos\angle POD$，可得

$$\frac{\overline{OF}^2+\overline{OP}^2-\overline{PF}^2}{2\cdot\overline{OF}\cdot\overline{OP}}=-\frac{\overline{OD}^2+\overline{OP}^2-\overline{PD}^2}{2\cdot\overline{OD}\cdot\overline{OP}}$$

$$\Rightarrow\frac{1^2+(4-r)^2-(3+r)^2}{2\cdot 1\cdot(4-r)}=-\frac{3^2+(4-r)^2-(1+r)^2}{2\cdot 3\cdot(4-r)}$$

$\Rightarrow r=\dfrac{12}{13}$。

18. $\dfrac{50}{3}$

出處：第三冊〈平面向量〉

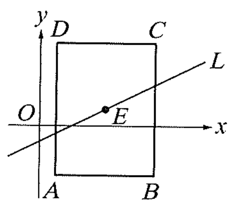
目標：柯西不等式的運用

解析：如右圖，因 $ABCD$ 為矩形

故直線 L 必過矩形對角線的交點 $E=\overline{AC}$ 的中點 $(4,1)$

$\Rightarrow 4a+b=3$

因 a，b 為正實數，故由柯西不等式得



$$\left(\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\right)^2\right)((2\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2)$$

$$\ge\left(\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{a}}\right)\cdot(2\sqrt{a})+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\right)\cdot(\sqrt{b})\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{b}\right)(4a+b)\ge(2\sqrt{2}\cdot 2+\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{b}\right)\cdot 3\ge(5\sqrt{2})^2\Rightarrow\frac{8}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{50}{3}$$

故 $\dfrac{8}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值為 $\dfrac{50}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

19. (2)(3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：討論、計算組合，二項式定理

解析：因為 1 到 10 的總和為奇數(即 $K_{10}=0$)

所以取 6 個數的總和為偶數等同於剩下 4 個數總和為奇數

因此 K_6 表示取 6 個數總和為偶數或取 4 個數總和為奇數

故 $K_6=C_4^5C_2^5+C_2^5C_4^5=C_1^5C_3^5+C_3^5C_1^5$

故選(2)(3)。

20. 511

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：討論、計算組合，二項式定理

解析：承 19.，K_6：取 6 個數，和為偶數＝取 4 個數，和為奇數

K_4：取 4 個數，和為偶數

因此 $K_4+K_6=C_4^{10}$

以此類推 $K_1+K_9=C_1^{10}$

$K_2+K_8=C_2^{10}$

$K_3+K_7=C_3^{10}$

$K_5+K_5=C_5^{10}$

可知 $K_1+K_2+\cdots\cdots+K_{10}$

$=C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+C_4^{10}+\frac{1}{2}C_5^{10}+0$

$=\frac{1}{2}(2^{10}-C_0^{10}-C_{10}^{10})$

$=511$。

◎評分原則

承 19.，K_6：取 6 個數，和為偶數＝取 4 個數，和為奇數

K_4：取 4 個數，和為偶數　(1 分)

因此 $K_4+K_6=C_4^{10}$

以此類推 $K_1+K_9=C_1^{10}$

$K_2+K_8=C_2^{10}$

$K_3+K_7=C_3^{10}$

$K_5+K_5=C_5^{10}$　(2 分)

可知 $K_1+K_2+\cdots\cdots+K_{10}$

$=C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+C_4^{10}+\frac{1}{2}C_5^{10}+0$

$=\frac{1}{2}(2^{10}-C_0^{10}-C_{10}^{10})$

$=511$。　(1 分)

21. 是，說明略

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：討論、計算組合，二項式定理

解析：承 20. 題取出 0 個數字，和為 0，也是偶數，可知其機率為 $\frac{511+1}{1024}=\frac{512}{1024}=\frac{1}{2}$

故總和為偶數的機率等於 $\frac{1}{2}$。

◎評分原則

承 20. 題取出 0 個數字，和為 0，也是偶數，可知其機率為 $\frac{511+1}{1024}=\frac{512}{1024}=\frac{1}{2}$　(2 分)

故總和為偶數的機率等於 $\frac{1}{2}$。　(1 分)