新竹區高中 112 年(111 學年度)高三上
學測模擬考（數 A）試題(翰林卷 111-E3)

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 當 $P(x,y)$ 在直線 $3x+2y=5$ 上變動時，關於 $Q=8^{x}+4^{y}$ 的敘述，
試問下列哪個選項是正確的？
(1) Q 有最大值 33，最小值 $8\sqrt{2}$　(2) Q 有最大值 12，但沒有最小值
(3) Q 沒有最大值，但有最小值 $8\sqrt{2}$　(4) Q 沒有最大值，但有最小值 12
(5) Q 沒有最大值也沒有最小值

答：(3)

解：$Q=2^{3x}+2^{2y}\geq 2\sqrt{2^{3x}\cdot 2^{2y}}=2\sqrt{2^{5}}=8\sqrt{2}$

2. 在平面上 A、B、C、D 四點中任意找三點組成三角形，已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，
$\overrightarrow{CB}=(-2,4)$，$\overrightarrow{DC}=(3,2)$，則其中最大三角形面積為多少？
(1) 8　(2) 9　(3) 11　(4) 14　(5) 16

答：(1)

解：令 $A(0,0)$，$B(2,3)$，$C(4,-1)$，$D(1,-3)$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{matrix}\right\|=7$，$\Delta ACD=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & -1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{11}{2}$

$\Delta ABD=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{matrix}\right\|=\frac{9}{2}$，$\Delta BCD=7+\frac{11}{2}-\frac{9}{2}=8\,(Max)$

3. 設 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，若對所有的正整數 n，點 (a_n, b_n) 皆在 $y=3^{x}$ 的圖形上，
且點 $\left(a_{13},\frac{1}{81}b_9\right)$ 亦為 $y=3^{x}$ 圖形上的一點，則此等差數列的公差為多少？
(1) -3　(2) -2　(3) -1　(4) 0　(5) 1

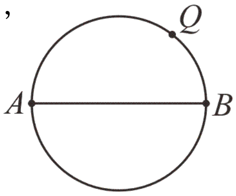
答：(3)

解：$(a_n,b_n)=\left(a_n,3^{a_n}\right)$

$\left(a_{13},\frac{1}{81}b_9\right)=\left(a_9+4d,\frac{1}{81}\times 3^{a_9}\right)\in y=3^{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{81}\times 3^{a_9}=3^{a_9+4d}=3^{-4}=3^{4d}\Rightarrow d=-1$

4. 右圖為一個以$\overline{AB}=3$為直徑的圓，若Q為圓周上的動點，
試求$4\overline{AQ}+3\overline{BQ}$的最大值為多少？
(1)10　　(2)15　　(3)$5\sqrt{2}$
(4)$10\sqrt{2}$　　(5)$15\sqrt{2}$



答：(2)

解：令$\angle QAB=Q$，而$\angle AQB=90^\circ$，$\overline{AB}=3$
$4\overline{AQ}+3\overline{BQ}=4\left(3\cos\theta\right)+3\left(3\sin\theta\right)\le 15$

5. 有一組皆為整數的8筆資料，其中最大的數值為2022，資料的全距為12，
則此組資料的變異數最小可能值為多少？
(1)36　(2)25　(3)16　(4)9　(5)4

答：(4)

解：$0,6,6,6,6,6,6,12$的標準差$\sqrt{\frac{1}{8}\left(36+36\right)}=3$

二、多選題

6. 下表是臺灣在2017年至2022人的人口相關統計資料，

項目＼年分	2017	2018	2019	2020	2021	2022
總人口數(人)	23571227	23588932	23603121	23561236	23375314	23514855
男性人口數(人)	11719580	11712913	11705186	11673765	11578696	11621537
女性人口數(人)	11851647	11876019	11897935	11887471	11796618	11893318
0～14 歲人口數(千人)	3092	3048	3010	2963	2890	2856
15～64 歲人口數(千人)	17211	17107	16986	16811	16546	16523
65 歲以上人口數(千人)	3268	3434	3607	3787	3939	4136
出生人數(人)	193844	181601	177767	165249	153820	145828
死亡人數(人)	171242	172784	176296	173156	183732	188063

試根據此統計資料選出正確的選項。
(1)從2017年至2022年的男性人口數逐年遞減
(2)就65歲以上人口數而言，2022年比2017年增加不到100萬人
(3)從2020年至2022年的死亡人數皆高於出生人數
(4)從2017年至2022年的0～14歲人口數和西元年分為負相關
(5)扶老比的定義為65歲以上人口數除以15～64歲人口數的百分比，則從2017年至2022年的扶老比逐年遞增

答：(2)(3)(4)(5)

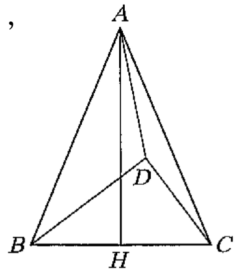
解：(1)×：2021年男性人口數低於2022年男性人口數
(2)○：就65歲以上人口數而言，
2022年比2017年增加868千人＝86.8萬人＜100萬人
(3)○：2020年起的死亡人數都高於出生人數
(4)○：2017年至2022年0～14歲人口數逐年降低，

西元年分逐年增加，所以兩者呈負相關

(5)○：扶老比$=\dfrac{65歲以上人口數}{15\sim 64歲人口數}$，因65歲以上人口數逐年遞增，

而$15\sim 64$歲人口數逐年遞減，所以扶老比逐年遞增

7. 如圖，一等腰ΔABC，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，$D$為$\Delta ABC$內部一點，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$，$\overline{BD}=8$，$\overline{AH}$為$\overline{BC}$上的高，試選出以下正確的選項。



(1) ΔABC的外接圓半徑為$\dfrac{169}{24}$　(2) ΔABD的面積為$\dfrac{132}{5}$

(3) $\overline{AD}^2=\dfrac{269}{5}$　(4) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}<\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(5) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=-48$

$\boxed{答}$：(1)(2)(3)

$\boxed{解}$：$H(0,0)$，$B(-5,0)$，$C(5,0)$，$A(0,12)$，$D\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{24}{5}\right)$

(1) 外心$(0,t)$ $\Rightarrow$半徑$=12-t=\sqrt{t^2+5^2}$ $\Rightarrow t=\dfrac{119}{24}$

(2) $\Delta ABD=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{BA}\\\overrightarrow{BD}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}5 & 12\\ \dfrac{32}{5} & \dfrac{24}{5}\end{matrix}\right\|=\dfrac{132}{5}$

(3) $\overline{AD}^2=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2+\left(\dfrac{36}{5}\right)^2=\dfrac{1345}{25}=\dfrac{269}{5}$

(4) 應為$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}>\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(5) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=(0,-12)\cdot\left(\dfrac{32}{5},\dfrac{24}{5}\right)=-\dfrac{288}{5}$

8. 已知$f(x)=-x^3-3x^2+10x$的對稱中心與另一實係數二次函數$g(x)$的頂點重合，且$g(0)=-11$，試選出以下正確的選項。

(1) $f(x)$的圖形與x軸恰交於一點　(2) $g(x)$除以$x-1$的餘式為-8

(3) $g(x)\le 0$的整數解一共有6個　(4)令$h(x)=f(x)-g(x)$，則$h(x)$可被$x-1$整除

(5) $f(x)$在$x=-1$附近的一次近似為$y=13x+1$

$\boxed{答}$：(2)(5)

$\boxed{解}$：$f(x)=-(x+1)^3+13(x+1)-12$，對稱中心$(-1,-12)$

$g(x)=a(x+1)^2-12\xrightarrow{g(0)=-11}a=1$

(1) $f(x)=-x(x+5)(x-2)$

(2) $g(1)=-8$

(3) $g(x)\le 0\Rightarrow\underbrace{-1-2\sqrt{3}}_{\fallingdotseq -4.46\cdots}\le x\le\underbrace{-1+2\sqrt{3}}_{\fallingdotseq 2.46\cdots}\xrightarrow{x\in Z}x=-4,-3,-2,-1,0,1,2$

(4) $h(x)=f(x)-g(x)=-x^3-4x^2+8x+11=(x+1)\left[-x^2-3x+11\right]$

(5)所求一次近似 $y=13(x+1)-12$

9. 已知 $f(x)=2\sin 2x+2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+d$ ，其中 d 為實數，已知 $f(x)$ 的最小值為 -5 ，試選出以下正確的選項。
(1) $d=-3$
(2) $f(x)$ 的最大值為 5
(3) $f(x)$ 的週期為 4π
(4) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=-2$ 的圖形在區間 $[0,\pi]$ 有兩個交點
(5)已知 (a,b) 在 $f(x)$ 的圖形上，則 $\left(\dfrac{\pi}{3}-a,b\right)$ 也在 $f(x)$ 的圖形上

答：(1)(4)

解：$f(x)=2\sin 2x+2\left(\cos 2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2x\cdot\dfrac{1}{2}\right)+d$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+d=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+d$

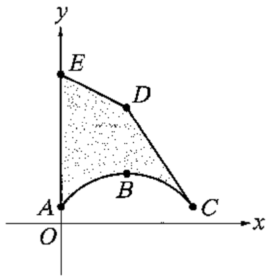
(1)(2) $Min=-2+d=-5 \Rightarrow d=-3$ ， $Max=2+d=-1$

(3)週期 $2\pi\times\dfrac{1}{2}=\pi$

(4)當 $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-3=-2 \Rightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ ，有 2 解

(5)對稱軸應為 $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{n\pi}{2}$

10. 如圖， $ABCDE$ 五點所圍出的封閉區域為 Ω ，其中 $A(0,1)$ 、 $B(4,3)$ 、 $C(8,1)$ 、 $D(4,7)$ 、 $E(0,9)$ ，且 A 、 B 、 C 三點在圓 Γ 上，試選出以下正確的選項。



(1)封閉區域 Ω 為 $\begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2\geq 25\\ x+2y\leq 18\\ 3x+2y\leq 26\end{cases}$
(2)設 L 為過圓 Γ 上 C 點之切線，則 D 、 E 兩點在 L 的異側
(3)封閉區域 Ω 的面積 <40
(4)設 P 為區域 Ω 內一點（含邊界），則 P 點到直線 $4x-3y=-40$ 的最短距離為 3
(5)設 $Q(a,b)$ 為區域 Ω 內一點（含邊界），則 $\sqrt{(a+4)^2+(b-6)^2}$ 的最大值為 13。

答：(2)(3)(5)

解：過 A,B,C 之圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{過}A(0,1)\Rightarrow e+f=-1\\ \text{過}B(4,3)\Rightarrow 4d+3e+f=-25\\ \text{過}C(8,1)\Rightarrow 8d+e+f=-65\end{array}\right\}\begin{array}{l}d=-8\\ e=4\\ f=-5\end{array}$$

圓 $x^2+y^2-8x+4y-5=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y+2)^2=25$

$\overleftrightarrow{CD}:3x+2y=26$ ， $\overleftrightarrow{DE}:x+2y=18$

(1)應為$\begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2\ge 25\\ x+2y\le 18\\ 3x+2y\le 26\\ x\ge 0\end{cases}$

(2)過C切線：$8x+y-4(x+8)+2(y+1)-5=0$

即$4x+3y=35\xrightarrow{令f(x,y)=4x+3y-35}\left\langle\begin{array}{l}f(4,7)=2\\ f(0,9)=-8\end{array}\right.$

(3)$ACDE$面積$=\dfrac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&8&4&0&0\\1&1&7&9&1\end{Vmatrix}=40\ \Rightarrow\Omega$面積$<40$

(4)$d\left(E(0,9),4x-3y+40=0\right)=\dfrac{13}{5}$

(5)所求$Max=d\left((-4,6),C(8,1)\right)=13$

11.右圖是高雄流行音樂中心在高音塔建築外觀的平面示意圖。
在假設圖中每個小正三角形的邊長為1的前提下，
請選出正確的選項。

(1)$\angle CAB=90°$

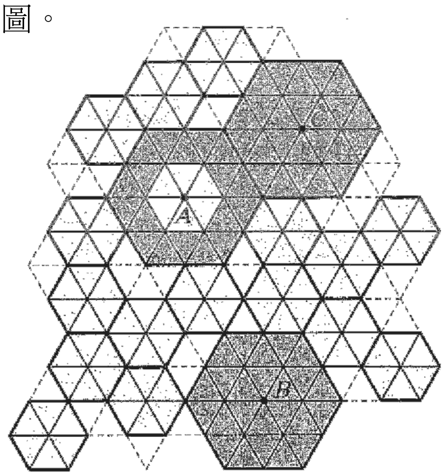
(2)$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影為$\dfrac{-1}{4}\overrightarrow{AC}$

(3) $|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}|$的最小值為$\dfrac{11}{2}$

(4)若$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{PC}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{PB}$，則$P$在$\Delta ABC$的內部

(5)承(4)，若$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{PC}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{PB}$，

則ΔAPC的面積$=\dfrac{1}{4}\cdot\Delta ABC$的面積



答：(2)(3)(4)

解：(1)$A(0,0)$，$B\left(2,-3\sqrt{3}\right)$，$C\left(3,\sqrt{3}\right)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-9=-3$

(2) $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影$=\sqrt{31}\times\dfrac{6-9}{\sqrt{31}\times\sqrt{12}}\times\dfrac{1}{\sqrt{12}}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

(3) $|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}|=\left|\left(2+3t,-3\sqrt{3}+\sqrt{3}t\right)\right|$

$$=\sqrt{(2+3t)^2+\left(-3\sqrt{3}+\sqrt{3}t\right)^2}=\sqrt{12\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{121}{4}}\ge\frac{11}{2}$$

(4) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)+\dfrac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\right)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow P\in\Delta ABC$內部

(5) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{12}\left[\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right]\Rightarrow\Delta ACP=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{4}{7}\Delta ABC$

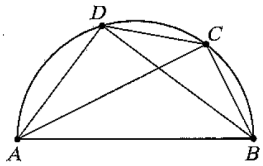
三、選填題

12. 曉明自製了一組共 21 張的卡牌，其中紅色、黃色和藍色的卡牌各有 7 張，每種顏色的卡牌上各標記了 1 到 7 號。將這 21 張卡牌隨機弄混順序以後，同時取出三張卡牌。假設每張卡牌被取出的機率相等，則這三張卡牌上的號碼為連續三整數的機率是______。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{27}{266}$

解：$\dfrac{\overbrace{123,234,345,456,567}^{5}\times 3^{3}}{C^{21}_{3}}=\dfrac{5\times 27}{1330}=\dfrac{27}{266}$

13. 如圖，$ABCD$ 為一圓內接四邊形，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，$\overline{AC}$ 為 $\angle DAB$ 的角平分線，若 $\overline{AD}=6$，$\overline{DB}=8$，則 $\overline{CD}=$________。（化為最簡根式）



答：$2\sqrt{5}$

解：$\sin\angle CAD=\sin\frac{1}{2}(\angle BAD)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\angle BAD}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{6}{10}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=\overline{AB}\ \Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times 10=2\sqrt{5}$

14.

1

$n=1$

1	3
3	1

$n=2$

1	3	5
3	1	3
5	3	1

$n=3$

1	3	5	7
3	1	3	5
5	3	1	3
7	5	3	1

$n=4$

如上所示，設 $\langle a_n\rangle$ 表示 $n\times n$ 方格內數字的總和且 $a_n=a_{n-1}+f(n)$，則 $a_7-f(6)=$________。

答：202

解：
$a_1=1$

$a_2=a_1+1+2\times(3)$

$a_3=a_2+1+2\times(3+5)$

$a_4=a_3+1+2\times(3+5+7)$

$a_n=a_{n-1}+1+2\times[3+5+7+\cdots+(2n-1)]$

相加：$a_n=a_{n-1}+\left(2n^2-1\right)$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-1\right)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\frac{n(2n-1)(n+2)}{3}$$

所求$=\dfrac{7\times13\times9}{3}-\left(2\times6^2-1\right)=273-71=202$

15. 已知 $ABCD$ 為平面上一凸四邊形，此四點的極坐標表示法分別為 $A[0,0]$、$B[4,\alpha]$、$C\left[2\sqrt{19},0\right]$、$D[4,\beta]$，其中 $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$，若 $\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$ 且 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，則 ΔACD 的面積為________。（化為最簡根式）

答：$4\sqrt{3}$

解：ΔABC 中，$\cos120^\circ=\dfrac{4^2+\overline{BC}^2-\left(2\sqrt{19}\right)^2}{2\times4\times\overline{BC}}\Rightarrow\overline{BC}=6$

$\therefore\cos\alpha=\dfrac{4^2+\left(2\sqrt{19}\right)^2-6^2}{2\times4\times\left(2\sqrt{19}\right)}=\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$

$\sin\beta=\sin\left(60^\circ-\beta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{7}{2\sqrt{19}}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

ΔACD 面積$=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{19}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=4\sqrt{3}$

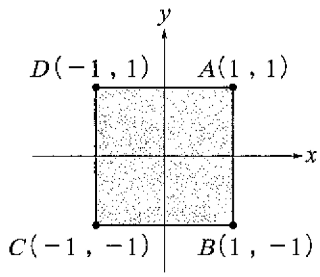
解：$\angle BCD=60^\circ$，$\angle ABC=120^\circ\Rightarrow\overline{AD}\,//\,\overline{BC}\Rightarrow\angle CAD=\angle ACB$

由正弦定理：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin120^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}\Rightarrow\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

ΔACD 面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{19}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=4\sqrt{3}$

16. 某科技大廠預計在年終尾牙舉辦加碼抽年終獎金的活動，規則如下：

抽獎者丟擲一次各面點數為 $1,2,3,4,5,6$ 的公正骰子，按照骰子擲出的數字，讓動點 P 在 xy 平面上移動，假設 P 從原點出發，



(1)若骰子出現的數字為偶數，則動點 P 向右移動一個單位，如為奇數則向左移動一個單位。

(2)若骰子出現的數字為質數，則動點 P 向上移動一個單位，如為非質數則向下移動一個單位。

當點 P 移動到 $A(1,1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金 9000 元，

當點 P 移動到 $B(1,-1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金 6000 元，

當點 P 移動到 $C(-1,-1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金 3000 元，

當點 P 移動到 $D(-1,1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金 0 元，

則抽獎者參與遊戲一次可獲得額外加碼的年終獎金期望值為______元。

答： 4000

解：

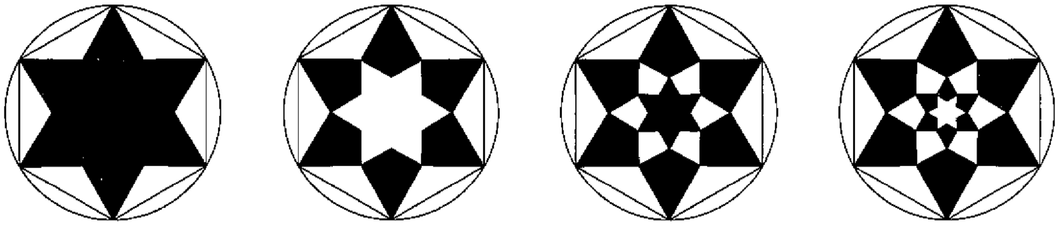
骰子擲出的點數	x 坐標	y 坐標	移動至
1	-1	-1	C 點
2	1	1	A 點
3	-1	1	D 點
4	1	-1	B 點
5	-1	1	D 點
6	1	-1	B 點

故 $P(\text{移至}A\text{點})=\frac{1}{6}$ ； $P(\text{移至}B\text{點})=\frac{2}{6}$ ；

$P(\text{移至}C\text{點})=\frac{1}{6}$ ； $P(\text{移至}D\text{點})=\frac{2}{6}$ ；

因此期望值 $=\frac{1}{6}\times 9000+\frac{2}{6}\times 6000+\frac{1}{3}\times 3000+\frac{2}{6}\times 0=4000$

17.曉東想利用圓內接正六邊形及其正六角星製造出一美麗徽章，如圖(四)所示，其方法為：

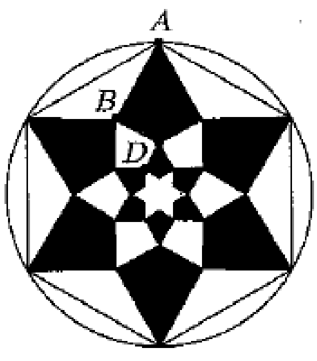


圖(一)　圖(二)　圖(三)　圖(四)

(1)畫出第一個正六角星，並將其塗成黑色，如圖(一)。
(2)畫出第二個正六角星，並將其塗成白色，如圖(二)。
(3)畫出第三個正六角星，並將其塗成黑色，如圖(三)。
(4)畫出第四個正六角星，並將其塗成白色，如圖(四)。
已知此徽章的半徑為 6 公分，則此徽章黑色部分的面積為________平方公分。
（化為最簡根式）

答： $\frac{80\sqrt{3}}{3}$

解：由半徑 $=6$ 知 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$



利用 $30°-60°-90°$ 直角三角形的邊長比關係

知 $\overline{BC}=2$ 、$\overline{CD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

〈解法一〉

圖(二)的黑色部分面積為 $\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\right)\times2\times6=24\sqrt{3}$

觀察其比例關係知：

圖(四)中增加的黑色部分面積為圖(二)的黑色部分面積的 $\left(\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ 倍

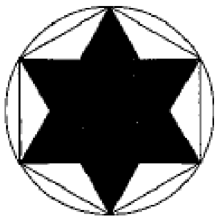
故圖(四)中增加的黑色部分面積為 $24\sqrt{3}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

故面積和為 $24\sqrt{3}+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}=\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ 平方公分

〈解法二〉

第一個正六角星的面積

$=12$ 個小正三角形的面積 $=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=36\sqrt{3}$



觀察其比例關係知：

第二個正六角星的面積

$=$ 第一個正六角星的面積的 $\left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$ 倍

故黑色部分的面積為 $36\sqrt{3}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}\right)=\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ 平方公分

第貳部分：混合題或非選擇題

18-19 題為題組

國家發展委員會於 2022 年 3 月正式公布「臺灣 2050 淨零排放路徑及策略總說明」，其中的運輸項目提到預計在 2040 年電動車及電動機車市售比達100% 。因此政府近幾年皆有提供電動機車的購買補助。滿18 歲的曉高為了響應淨零排放的行動，於今年 8 月時購買了一臺電動機車，電動機車與一般機車的使用習慣不同，主要的差異有兩點：

(1) 一般機車的動力來源是無鉛汽油，而電動機車的動力來源是電池。當電池沒電的時候需至電池交換站換取新電池，電池交換站常設在加油站、便利商店外。

(2) 電池資費的計價方式是根據騎乘公里數的多寡來做選擇。

試根據以上資訊，回答下列問題：

18. 曉高目前的電池資費為甲方案，根據過去這幾個月的騎乘經驗，他每個月騎乘的里程都

超過300公里且少於600公里，試問：依據下述資費方案，當曉高每個月騎乘的里程超過________公里時，選擇乙方案會較甲方案划算。

資費方案	甲	乙	丙
預選里程	0～300公里	0～600公里	不限里程
月繳金額	500元	800元	1200元
額外里程	超過300公里每公里2.5元	超過600公里每公里1.5元	無

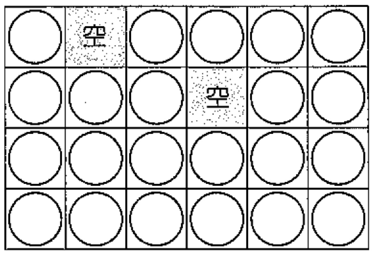
答：420

解：$\dfrac{800-500}{2.5}=120$

選擇甲方案騎乘的里程至420公里時，須繳金額為800元

所以曉高騎乘的里程若超過420公里，建議改選擇乙方案較划算

19. 曉高想要交換2顆滿格的電池，根據 *APP* 搜尋，來到一個共有24個插槽的電池交換站，看到有2個空插槽且其餘的22個插槽皆放了滿格電池，如圖所示。交換電池的步驟如下：



(a)將兩顆沒電的電池放入空插槽中

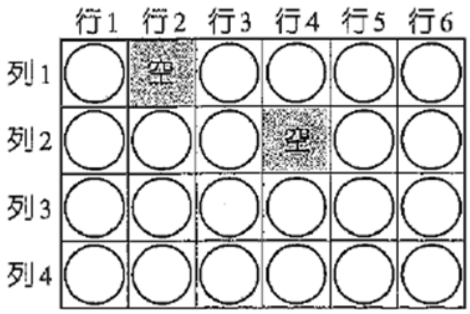
(b)認證與上傳里程資料後，交換站會同時彈出兩顆電池

(c)將兩顆滿格電池再放回車廂

則曉高在此次換電池的過程中，同時彈出的兩顆電池在不同行且不同列的情況有多少種？

答：151種

解：原本兩個空插槽為剛放入的低電量電池，所以不會彈出來需避開



所以可以分情況討論：

①兩顆電池由列3且列4彈出：$6\times5=30$

②一顆電池由列1或列2彈出，另一顆電池由：列3或列4彈出：

$$\underbrace{C^{2}_{1}}_{\text{一顆由(2,2)或(1,4)彈出}}\times\underbrace{C^{2}_{1}}_{\text{列 3 列 4 擇 1}}\times\underbrace{5}_{\text{其餘 5 行擇 1}}+\underbrace{C^{2}_{1}}_{\text{列 1 列 2 擇 1}}\times\underbrace{4}_{\text{行 1356 擇 1}}\times\underbrace{C^{2}_{1}}_{\text{列 3 列 4 擇 1}}\times\underbrace{5}_{\text{其餘 5 行擇 1}}=100$$

③兩顆電池有列 1 且列彈出

$$\underbrace{4}_{\text{列 1 由行 1356 擇 1}}\times\underbrace{4}_{\text{列 2}}+\underbrace{1}_{\text{列 1 行 4}}\times\underbrace{5}_{\text{列 2 由行 12356 擇 1}}=21$$

①+②+③ $=151$(種)

$\boxed{解}$：全部 − 同行或同列 $C^{22}_{2}-\underbrace{\left(4\times C^{4}_{2}+2\times C^{3}_{2}\right)}_{\text{同行}}-\underbrace{\left(2\times C^{6}_{2}+2\times C^{5}_{2}\right)}_{\text{同行}}=151$(種)

$\boxed{解}$：不同行且不同列 − 不同行且不同列且選中 $(1,2)$ − 不同行且不同列且選中 $(2,4)$

$+$ 不同行且不同列且選中 $(1,2)$ 及 $(2,4)$ $=\dfrac{24\times 15}{2}-15-15+1=151$(種)

$\boxed{解}$：① $(1,2)$，$(2,4)$ 無法彈出

②若其中一顆彈出位置在

$(1,1)$，$(1,3)$，$(1,5)$，$(1,6)$，

$(2,1)$，$(2,3)$，$(2,5)$，$(2,6)$，

$(3,2)$，$(3,4)$，$(4,2)$，$(4,4)$，共 12 種情況，

則另一顆剩 14 格可彈出：$12\times 14=168$

③若其中一顆彈出位置在 $(2,2)$，$(1,4)$ 此 2 種情況，

則另一顆剩 15 格可彈出：$2\times 15=30$

④若其中一顆彈出位置在

$(3,1)$，$(3,3)$，$(3,5)$，$(3,6)$，

$(4,1)$，$(4,3)$，$(4,5)$，$(4,6)$，共 8 種情況

則另一顆剩 13 格可彈出：$8\times 13=104$

①+②+③+④ $=302$

但因為不分先後順序，故將排列數除掉為 $\dfrac{302}{2}=151$(種)