

# 臺中市高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次模擬考

第壹部分：選擇題(占 85 分)



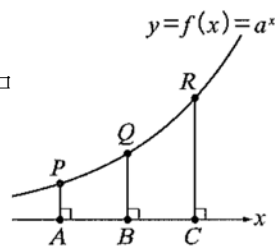
## 一、單選題(占 30 分)

- 某班 35 位學生期中考數學成績的平均數為 60 分，標準差為 12.3 分，若將班上的最高分(95 分)與最低分(30 分)兩筆資料刪除，另外計算其餘 33 人的成績，得到的新平均數為  $\mu$ (分)，新標準差為  $\sigma$ (分)。試選出下列正確的選項。(1)  $\mu > 60$  且  $\sigma \leq 12.3$  (2)  $\mu < 60$  且  $\sigma \leq 12.3$  (3)  $\mu > 60$  且  $\sigma > 12.3$  (4)  $\mu < 60$  且  $\sigma > 12.3$  (5)  $\mu < 60$  但無法確定  $\sigma$  與 12.3 的大小關係
- 設  $a$ 、 $b$  為非零的兩相異實數，滿足  $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 10^{\log 2}$ ，則將  $\frac{b}{a}$  化為最簡分數為下列何者？(1)  $\frac{5}{4}$  (2)  $\frac{4}{5}$  (3) 1 (4) 2 (5)  $\frac{1}{2}$
- 圓內接四邊形  $ABCD$  中，滿足  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ ，點  $E$  為對角線  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$  之交點，求  $\triangle ABC$  與  $\triangle ACD$  之面積比？(1) 1 : 4 (2) 4 : 1 (3) 3 : 2 (4) 2 : 3 (5) 5 : 2
- 坐標平面上有一光源在  $P(2, k)$  處，另有一圓  $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ，若該光源將圓  $C$  投射在  $x$  軸的影長為  $\overline{AB}$ ，且  $\overline{AB}$  的中點為原點，則下列選項何者最接近  $k$  值？(1) 4.5 (2) 4.6 (3) 4.7 (4) 4.8 (5) 4.9
- 某商品價格的每日漲跌幅呈現「一日上漲 10%、再一日下跌 10%」每兩日一循環的穩定情形。若該商品一開始的定價為 10000 元，則幾日後，價格會開始低於原來價格的一半？請選出最適合的選項。(1) 68 日 (2) 69 日 (3) 137 日 (4) 138 日 (5) 價格維持在 10000 元
- 某三角形的邊長最大值與最小值相差 4，且三邊長形成等差數列，若其最大內角恰為最小內角的 2 倍，則此三角形面積為下列何者？(1)  $\frac{15}{2}$  (2) 15 (3) 30 (4)  $\frac{15\sqrt{7}}{2}$  (5)  $15\sqrt{7}$

## 二、多選題(占 30 分)

- 設  $x$ 、 $y$  均為實數，且滿足  $|x-1| \leq 2$  且  $|x+y| \leq 1$ ，請選出正確的選項。  
 (1)  $-1 \leq x \leq 3$  (2)  $-4 \leq y \leq 2$  (3)  $5 \leq x^2 + y^2 \leq 25$  (4)  $x - 2y \geq -6$   
 (5) 滿足題意的  $(x, y)$  在坐標平面上形成的圖形面積為 24

- 函數  $y = f(x) = a^x$  的部分圖形與  $a_k b_k$  軸的關係配置圖如右，其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分別為  $x$  軸上由左至右的相異三點，而  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點  $y$  坐標均為正數並都在  $y = f(x)$  圖形上，且  $\overline{AP}$ 、 $\overline{BQ}$ 、 $\overline{CR}$  均垂直  $x$  軸。請選出正確的選項。



- 直線  $y = 10^{-2023}$  與  $y = f(x)$  的圖形必定有交點 (2) 設直線  $PQ$  斜率為  $m_1$ 、直線  $QR$  斜率為  $m_2$ 、直線  $PR$  斜率為  $m_3$ ，則  $m_1 < m_2 < m_3$  (3) 若  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，則  $\overline{AP} + \overline{CR} = 2\overline{BQ}$   
 (4) 若  $\overline{AB} = \overline{BC}$  且  $B$  為坐標原點，則  $\overline{AP} \times \overline{CR} = 1$  (5) 先將  $y = a^x$  的圖形對稱於  $y = x$ ，再以  $x$  軸為中心(基準線)，鉛直伸縮為  $\log a$  倍，可得到函數  $y = \log x$  的圖形
- 甲、乙、丙、丁四人玩猜拳(剪刀、石頭、布)的遊戲，同時出拳一次，請選出正確的選項。(1) 尚未出拳前，甲、乙、丙三人都決定好一定會出剪刀，則此三人能贏拳的機率為  $\frac{1}{2}$  (2) 尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則恰只有甲、乙贏拳的機率

為  $\frac{1}{9}$  (3)尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則甲、乙能贏拳的機率為  $\frac{1}{3}$   
 (4)尚未出拳前，甲、乙兩人各自決定好分別一定會出剪刀跟石頭，則猜拳結果能分出勝負的機率大於  $\frac{1}{2}$  (5)若四人隨機出拳，則猜拳結果能分出勝負的機率小於  $\frac{1}{2}$

10. 某一組二維數據資料  $(x_i, y_i)$ ， $i=1, 2, \dots, 20$ ，已知  $x$  的平均數  $\mu_x = 2$ ， $y$  的平均數  $\mu_y = 1$ ，相關係數  $r = -0.8$ 。此外， $y$  對  $x$  的迴歸直線（最適直線） $L$  通過點  $(-2, 4)$ 。設  $x$ 、 $y$  的標準差分別為  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ ，請選出正確的選項。

(1)若從該組資料中任取 2 筆來比較，則  $x$  值較大的資料其  $y$  值較小

(2)迴歸直線(最適直線) $L$ 的斜率大於  $S_1$  (3) $\sigma_x > \sigma_y$

(4)若新增一筆資料  $(0, \frac{5}{2})$ ，再計算 21 筆資料的相關係數為  $r'$ ，則  $r' > r$

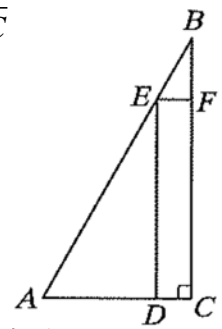
(5)若令  $X_i = \frac{x_i - 2}{\sigma_x}$ ， $Y_i = \frac{y_i - 1}{\sigma_y}$ ，則  $Y$  對  $X$  的迴歸直線（最適直線）斜率為  $-0.8$

11. 如右圖，在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別在  $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  上，且  $CDEF$  為長方形，已知  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{DE} = 4$ ，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD} = 4 \tan A$  (2) $\overline{BF} = 6 \sin A - 4$  (3) $\overline{EF} < 2$

(4) $\triangle ABC$  面積為  $9 \sin 2A$

(5)當  $\triangle ABC$  面積為最大值時， $\overline{DF}^2 = 50 - 24\sqrt{2}$



12. 已知滿足方程式  $2^x \cdot 7^y = 112$  的所有數對  $(x, y)$  在坐標平面上會形成一直線  $L$ ，請選出正確的選項。(1) $L$  通過點  $(4, 1)$  (2) $L$  的  $x$  截距大於 7 (3) $L$  不通過第三象限 (4)若直線  $L'$  與  $L$  垂直，則  $L'$  的斜率大於 3 (5)若  $\theta$  為  $L$  與  $x$  軸所夾的銳夾角，則  $\tan \theta = \log_7 2$

### 三、選填題(占 25 分)

13. 關於學測數學試題的選填題，須答對該題全部空格才能得到 5 分，但答錯不倒扣。下方是某一選填題的最後一段文字，

隨機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ 。(化為最簡分數)

考生小豪在考試時間截止前半分鐘還解不出來，但他知道答案是一個小於 1 的正數，只好在答案卡該兩格隨機劃記符合格式(最簡分數)的答案，則小豪本題得分之期望值為\_\_\_\_\_分。(化為最簡分數)

14. 已知數列  $\{a_n\}$  的遞迴關係式為 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \cos \frac{n^2 \pi}{2} \end{cases} \quad (n \text{ 為正整數})$$

則此數列前 20 項之平方和  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{19}^2 + a_{20}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 正六邊形  $ABCDEF$  的邊長 4，若  $P$ 、 $Q$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$  上的點，滿足  $\overline{BP} = \overline{PC}$ 、 $\overline{DQ} = 3\overline{QE}$ ，試求(內積)  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} =$ \_\_\_\_\_。

16. 設多項式  $f(x)$  以升冪排列共有 20 項，且第  $k$  項均可表示為  $a_k b_k$ ，其中  $a_1, a_2, \dots, a_{20}$  是一個首項為 1，公差為 2 的等差數列； $b_1, b_2, \dots, b_{20}$  滿足  $b_1 = 1$ ， $b_{k+1} = -x \cdot b_k$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, 19$ 。若  $f(x)$  除以  $x^2 - 1$  的餘式為  $r(x)$ ，則  $\frac{r(x)}{10} =$ \_\_\_\_\_。

17. 已知  $f(x)$  為滿足下列三個條件的四次多項式：

- ①  $f(x)$  除以  $(x+1)^3$  的餘式為  $x+1$ 。 ②  $f(x)$  的所有係數和為  $-6$ 。  
 ③  $f(x)$  的常數項為  $-2$ 。

而另一多項式  $g(x)$  滿足  $f(x) + 2 = x \cdot g(x)$ ，則  $y = g(x)$  的圖形之對稱中心坐標為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

**第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)**

**第 18 至 20 題為題組**

坐標平面上  $O$  為原點，今有兩動點  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $Q(2 \cos 3\theta, 2 \sin 3\theta)$ ，其中  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，試回答下列問題。

18. 若所有動點  $P$  形成的圖形為  $\Gamma_1$ ，所有動點  $Q$  形成的圖形為  $\Gamma_2$ ，兩圖形的長度分別為  $S_1$ 、 $S_2$ ，則  $S_2$ 、 $S_1$  的比值  $\frac{S_2}{S_1}$  為下列哪個選項？ (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6 (5)  $\frac{9}{4}$   
 (單選題，3 分)

19. 試求出兩動點的距離  $\overline{PQ}$  之最大值  $M$  及最小值  $m$ ，以數對  $(M, m)$  表示答案。  
 (非選擇題，6 分)

20. 試求出  $\Delta OPQ$  面積的最大值及此時對應的  $Q$  點坐標。(非選擇題，4 分、2 分)

RA396 臺中市高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次模擬考

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (1) 3. (4) 4. (3) 5. (4) 6. (5) 7. (1)(2)(4) 8. (1)(4)(5) 9. (2)(3)  
10. (2)(3)(5) 11. (2)(3)(4)(5) 12. (1)(3)(5)

選填題：13.  $\frac{5}{27}$  14. 770 15. 17 16.  $-21x+19$  17.  $(\frac{-1}{2}, -4)$

混合題：18. (4) 19. (3, 1) 20. 面積最大值 1，此時對應的  $Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$