臺中市高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次模擬考

第壹部分：選擇題(占 85 分)

RA396

一、單選題(占 30 分)

1. 某班 35 位學生期中考數學成績的平均數為 60 分，標準差為 12.3 分，若將班上的最高分(95 分)與最低分(30 分)兩筆資料刪除，另外計算其餘 33 人的成績，得到的新平均數為 μ(分)，新標準差為 σ(分)。試選出下列正確的選項。 (1) $\mu>60$ 且 $\sigma\le 12.3$ (2) $\mu<60$ 且 $\sigma\le 12.3$ (3) $\mu>60$ 且 $\sigma>12.3$ (4) $\mu<60$ 且 $\sigma>12.3$ (5) $\mu<60$ 但無法確定 σ 與 12.3 的大小關係

2. 設 a 、 b 為非零的兩相異實數，滿足 $\frac{a}{b}+\frac{a+10b}{b+10a}=10^{\log 2}$ ，則將 $\frac{b}{a}$ 化為最簡分數為下列何者？ (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) 1 (4) 2 (5) $\frac{1}{2}$

3. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，滿足 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ ，點 E 為對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 之交點，求 ΔABC 與 ΔACD 之面積比？ (1) 1：4 (2) 4：1 (3) 3：2 (4) 2：3 (5) 5：2

4. 坐標平面上有一光源在 $P(2,k)$ 處，另有一圓 C ：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ ，若該光源將圓 C 投射在 x 軸的影長為 $\overline{AB}$ ，且 $\overline{AB}$ 的中點為原點，則下列選項何者最接近 k 值？ (1) 4.5 (2) 4.6 (3) 4.7 (4) 4.8 (5) 4.9

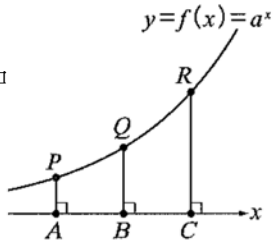
5. 某商品價格的每日漲跌幅呈現「一日上漲10% 、再一日下跌10% 」每兩日一循環的穩定情形。若該商品一開始的定價為10000元，則幾日後，價格會開始低於原來價格的一半？請選出最適合的選項。(1) 68日 (2) 69 日 (3)137 日 (4)138日 (5)價格維持在10000元

6. 某三角形的邊長最大值與最小值相差 4，且三邊長形成等差數列，若其最大內角恰為最小內角的 2 倍，則此三角形面積為下列何者？ (1) $\frac{15}{2}$ (2) 15 (3) 30 (4) $\frac{15\sqrt{7}}{2}$ (5) $15\sqrt{7}$

二、多選題(占 30 分)

7. 設 x 、 y 均為實數，且滿足 $|x-1|\le 2$ 且 $|x+y|\le 1$ ，請選出正確的選項。
(1) $-1\le x\le 3$ (2) $-4\le y\le 2$ (3) $5\le x^2+y^2\le 25$ (4) $x-2y\ge -6$
(5) 滿足題意的 (x,y) 在坐標平面上形成的圖形面積為 24

8. 函數 $y=f(x)=a^x$ 的部分圖形與 a_kb_k 軸的關係配置圖如右，其中 A 、 B 、 C 分別為 x 軸上由左至右的相異三點，而 P 、 Q 、 R 三點 y 坐標均為正數並都在 $y=f(x)$ 圖形上，且 $\overline{AP}$ 、 $\overline{BQ}$ 、 $\overline{CR}$ 均垂直 x 軸。請選出正確的選項。



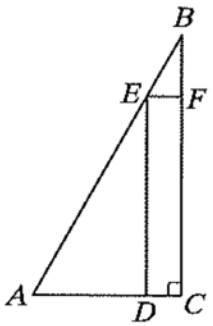
(1)直線 $y=10^{-2023}$ 與 $y=f(x)$ 的圖形必定有交點 (2)設直線 PQ 斜率為 m_1 、直線 QR 斜率為 m_2 、直線 PR 斜率為 m_3 ，則 $m_1<m_2<m_3$ (3)若 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ，則 $\overline{AP}+\overline{CR}=2\overline{BQ}$ (4)若 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 且 B 為坐標原點，則 $\overline{AP}\times\overline{CR}=1$ (5)先將 $y=a^x$ 的圖形對稱於 $y=x$ ，再以 x 軸為中心(基準線)，鉛直伸縮為 $\log a$ 倍，可得到函數 $y=\log x$ 的圖形

9. 甲、乙、丙、丁四人玩猜拳（剪刀、石頭、布）的遊戲，同時出拳一次，請選出正確的選項。(1)尚未出拳前，甲、乙、丙三人都決定好一定會出剪刀，則此三人能贏拳的機率為 $\frac{1}{2}$ (2)尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則恰只有甲、乙贏拳的機率

為$\frac{1}{9}$　(3)尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則甲、乙能贏拳的機率為$\frac{1}{3}$
(4)尚未出拳前，甲、乙兩人各自決定好分別一定會出剪刀跟石頭，則猜拳結果能分出勝負的機率大於$\frac{1}{2}$　(5)若四人隨機出拳，則猜拳結果能分出勝負的機率小於$\frac{1}{2}$

10. 某一組二維數據資料(x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,20$，已知x的平均數$\mu_x=2$，y的平均數$\mu_y=1$，相關係數$r=-0.8$。此外，y對x的迴歸直線（最適直線）L通過點$(-2,4)$。設x、y的標準差分別為σ_x、σ_y，請選出正確的選項。
(1)若從該組資料中任取 2 筆來比較，則x值較大的資料其y值較小
(2)迴歸直線(最適直線)L的斜率大於-0.8　(3)$\sigma_x>\sigma_y$
(4)若新增一筆資料$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，再計算 21 筆資料的相關係數為$r'$，則$r'>r$
(5)若令$X_i=\frac{x_i-2}{\sigma_x}$，$Y_i=\frac{y_i-1}{\sigma_y}$，則$Y$對$X$的迴歸直線（最適直線）斜率為$-0.8$

11. 如右圖，在ΔABC中，$\angle C=90°$，D、E、F分別在$\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上，且$CDEF$為長方形，已知$\overline{AB}=6$，$\overline{DE}=4$，請選出正確的選項。
(1)$\overline{AD}=4\tan A$　(2)$\overline{BF}=6\sin A-4$　(3)$\overline{EF}<2$
(4)ΔABC面積為$9\sin 2A$
(5)當ΔABC面積為最大值時，$\overline{DF}^2=50-24\sqrt{2}$



12. 已知滿足方程式$2^x\cdot 7^y=112$的所有數對(x,y)在坐標平面上會形成一直線L，請選出正確的選項。　(1)L通過點$(4,1)$　(2)L的x截距大於 7　(3)L不通過第三象限
(4)若直線L'與L垂直，則L'的斜率大於 3　(5)若θ為L與x軸所夾的銳夾角，則$\tan\theta=\log_7 2$

三、選填題(占 25 分)

13. 關於學測數學試題的選填題，須答對該題全部空格才能得到 5 分，但答錯不倒扣。
下方是某一選填題的最後一段文字，

> 隨機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為 $\frac{\text{(18-1)}}{\text{(18-2)}}$ 。(化為最簡分數)

考生小豪在考試時間截止前半分鐘還解不出來，但他知道答案是一個小於 1 的正數，只好在答案卡該兩格隨機劃記符合格式(最簡分數)的答案，
則小豪本題得分之期望值為_____分。(化為最簡分數)

14. 已知數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=a_n+\cos\frac{n^2\pi}{2}\end{cases}$($n$為正整數)，
則此數列前 20 項之平方和$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{19}^2+a_{20}^2=$_____。

15. 正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長 4，若 P 、 Q 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$ 上的點，滿足 $\overline{BP}=\overline{PC}$ 、 $\overline{DQ}=3\overline{QE}$ ，試求(內積) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=$_____。

16. 設多項式 $f(x)$ 以升冪排列共有 20 項，且第 k 項均可表示為 $a_k b_k$ ，其中 a_1 ， a_2 ，……， a_{20} 是一個首項為 1，公差為 2 的等差數列； b_1 ， b_2 ，……， b_{20} 滿足 $b_1=1$ ， $b_{k+1}=-x\cdot b_k$ ，其中 $k=1,2,\cdots\cdots,19$ 。若 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $r(x)$ ，則 $\dfrac{r(x)}{10}=$_____。

17. 已知 $f(x)$ 為滿足下列三個條件的四次多項式：

① $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 $x+1$ 。 ② $f(x)$ 的所有係數和為 -6 。

③ $f(x)$ 的常數項為 -2 。

而另一多項式 $g(x)$ 滿足 $f(x)+2=x\cdot g(x)$ ，則 $y=g(x)$ 的圖形之對稱中心坐標為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

第 18 至 20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，今有兩動點 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 、 $Q(2\cos 3\theta,2\sin 3\theta)$ ，其中 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ ，試回答下列問題。

18. 若所有動點 P 形成的圖形為 Γ_1 ，所有動點 Q 形成的圖形為 Γ_2 ，兩圖形的長度分別為 S_1 、 S_2 ，則 S_2 、 S_1 的比值 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 為下列哪個選項？ (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6 (5) $\dfrac{9}{4}$

(單選題，3 分)

19. 試求出兩動點的距離 $\overline{PQ}$ 之最大值 M 及最小值 m ，以數對 (M,m) 表示答案。

(非選擇題，6 分)

20. 試求出 ΔOPQ 面積的最大值及此時對應的 Q 點坐標。(非選擇題，4 分、2 分)

參考答案

選擇題：1. (2)　**2.** (1)　**3.** (4)　**4.** (3)　**5.** (4)　**6.** (5)　**7.** (1)(2)(4)　**8.** (1)(4)(5)　**9.** (2)(3)
10. (2)(3)(5)　**11.** (2)(3)(4)(5)　**12.** (1)(3)(5)

選填題：13. $\frac{5}{27}$　**14.** 770　**15.** 17　**16.** $-21x+19$　**17.** $(\frac{-1}{2},-4)$

混合題：18. (4)　**19.** (3, 1)　**20.** 面積最大值 1，此時對應的 $Q(-\sqrt{2},\sqrt{2})$