# 數學 A 考科詳解

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (1) | (4) | (3) | (4) | (5) | (1)(2)(4) |
| 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | | |
| (1)(4)(5) | (2)(3) | (2)(3)(5) | (2)(3)(4)(5) | (1)(3)(5) | | |

## 第壹部分、選擇（填）題

### 一、單選題

1. (2)

**出處**：第二冊〈數據分析〉

**目標**：平均數及標準差之概念

**解析**：$\because \dfrac{95+30}{2}=\dfrac{125}{2}>60$，可視為刪除兩筆大於平均數的資料，故新平均數 $\mu<60$

又刪除兩筆最極端之資料後，剩餘的資料 (整體) 絕對不會比原先的資料更分散，

意即會變得稍微集中一點，所以標準差不會大於 12.3，

換句話說：$\sigma \le 12.3$

故選(2)。

2. (1)

**出處**：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

**目標**：實數性質、常用對數定義

**解析**：$\dfrac{a}{b}+\dfrac{a+10b}{b+10a}=10^{\log 2} \Rightarrow \dfrac{ab+10a^2+ab+10b^2}{b^2+10ab}=2$

$\Rightarrow 10a^2+10b^2+2ab=2b^2+20ab$

$\Rightarrow 10a^2-18ab+8b^2=0 \Rightarrow 5a^2-9ab+4b^2=0$

$\Rightarrow (a-b)(5a-4b)=0$

得 $a=b$ (不合) 或 $5a=4b \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{4}$，故選(1)。

〔另解〕

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{a+10b}{b+10a}=10^{\log 2} \Rightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{\frac{a}{b}+10}{1+10\cdot\frac{a}{b}}=2$

令 $\dfrac{a}{b}=x$，

則 $x+\dfrac{x+10}{1+10x}=2$

$\Rightarrow x(1+10x)+(x+10)=2(1+10x) \Rightarrow 10x^2-18x+8=0$

$\Rightarrow 5x^2-9x+4=0 \Rightarrow (x-1)(5x-4)=0$

得 $x=1$ (不合) 或 $x=\dfrac{4}{5}$，所求為 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{4}$，故選(1)。

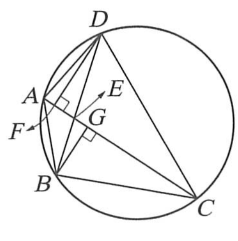
3. (4)

**出處**：第三冊〈平面向量〉

**目標**：向量的線性組合、分點公式的應用

**解析**：設 $\overrightarrow{AE}=t\,\overrightarrow{AC}=3t\,\overrightarrow{AB}+2t\,\overrightarrow{AD}$，

因 $E$，$B$，$D$ 三點共線




由分點公式可知 $3t+2t=1$，得 $t=\dfrac{1}{5}$，

即 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，

並得知 $\overline{BE}:\overline{DE}=2:3$

再分別取△$ABC$ 與△$ACD$ 公共底邊 $\overline{AC}$ 上的高 $\overline{BG}$、$\overline{DF}$

此時△$BGE$～△$DFE$，

得知 $\overline{BG}:\overline{DF}=\overline{BE}:\overline{DE}=2:3$

$\therefore$△$ABC$ 面積：△$ACD$ 面積$=\overline{BG}:\overline{DF}=2:3$

故選(4)。

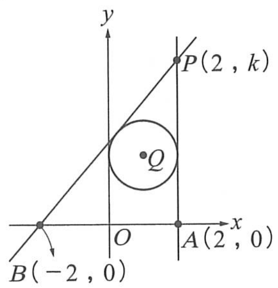
4. (3)

**出處**：第一冊〈直線與圓〉

**目標**：圓與直線相切、點到直線的距離

**解析**：由題目知圓心 $Q(1,2)$，半徑 $r=1$ 並由 $P$、$Q$、$r$ 之關係得知：

過 $P$ 的鉛垂線會與圓 $C$ 相切，因此可令 $A(2,0)$、$B(-2,0)$




再假設切線 $\overleftrightarrow{BP}：y=m(x+2)$，即 $\overleftrightarrow{BP}：mx-y+2m=0$

由 $d(Q,\overleftrightarrow{BP})=r$ 知：$\dfrac{|m-2+2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow (3m-2)^2=m^2+1 \Rightarrow 8m^2-12m+3=0$

解出 $m=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$，因為過 $B$ 的兩條切線中，$\overleftrightarrow{BP}$ 之斜率較大

故取 $m=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，即 $\overleftrightarrow{BP}：y=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}(x+2)$

將 $x=2$ 代入 $\overleftrightarrow{BP}$，得 $y=k=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\times 4=3+\sqrt{3}\approx 4.732$

故選(3)。

5. (4)

**出處**：第三冊〈指數與對數函數〉

**目標**：指數與對數的應用

**解析**：兩日一循環，則每兩日的物價漲跌幅變為

$(1+10\%)(1-10\%)=0.99$ 倍

將每兩日視為一個單位時間，設經過 $n$ 個單位時間後，價格為原來的一半

則 $10000\times(0.99)^n=5000 \Rightarrow (0.99)^n=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \log(0.99)^n=\log\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow n(\log 9+\log 1.1-1)=-\log 2$

$\Rightarrow -0.0044n\approx -0.3010$

$\Rightarrow n\approx\dfrac{0.3010}{0.0044}=68.4\cdots\cdots$，此時 $2n=136.8\cdots\cdots$，

必須大於 136.8 日，才能符合所求

但經過奇數日之價格較前一日上漲，

所以在經過 137 日後的價格比經過 136 日後的價格為高，因此取 138 日

故選(4)。

6. (5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：正弦定理、餘弦定理、面積公式、二倍角公式

解析：設三邊長為 $x$，$x+2$，$x+4$，且最大內角為 $2\theta$，最小內角為 $\theta$，

利用正弦定理可知 $\dfrac{x+4}{\sin 2\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$

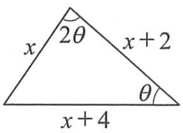
$\Rightarrow \dfrac{x+4}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{x}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{x+4}{2x}$

再利用餘弦定理可知 $\cos\theta=\dfrac{(x+2)^2+(x+4)^2-x^2}{2\cdot(x+2)\cdot(x+4)}$

因此 $\dfrac{x+4}{2x}=\dfrac{(x+2)^2+(x+4)^2-x^2}{2\cdot(x+2)\cdot(x+4)}$

$\Rightarrow \dfrac{x+4}{x}=\dfrac{x^2+12x+20}{(x+2)(x+4)}$




$\because x\neq -2$

$\therefore \dfrac{x+4}{x}=\dfrac{x+10}{x+4}$

$\Rightarrow x^2+8x+16=x^2+10x$

$\Rightarrow 2x=16\Rightarrow x=8$

此時 $\cos\theta=\dfrac{8+4}{2\times 8}=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

面積為 $\dfrac{1}{2}\times 10\times 12\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=15\sqrt{7}$

故選(5)。

## 二、多選題

7. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：實數性質、絕對值不等式、二元一次不等式

解析：(1) ○：$|x-1|\le 2\Rightarrow -2\le x-1\le 2\Rightarrow -1\le x\le 3$

(2) ○：$|x+y|\le 1\Rightarrow -1\le x+y\le 1$，

又 $\begin{cases}-1\le x+y\le 1\\ -3\le -x\le 1\end{cases}$

因此 $-4\le y\le 2$

(3) ╳：$\begin{cases}0\le x^2\le 9\\ 0\le y^2\le 16\end{cases}\Rightarrow 0\le x^2+y^2\le 25$

(4) ○：設 $x-2y=t\cdot(x)+s\cdot(x+y)$

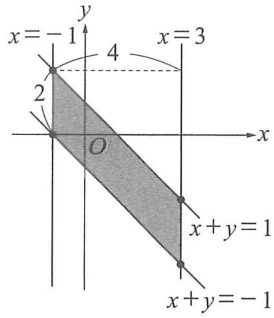
$\Rightarrow\begin{cases}t+s=1\\ s=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\ s=-2\end{cases}$

即 $x-2y=3(x)+(-2)(x+y)$

又 $\begin{cases}-3\le 3x\le 9\\ -2\le -2(x+y)\le 2\end{cases}\Rightarrow -5\le x-2y\le 11$

表示 $x-2y$ 的最小值為 $-5$，必定大於 $-6$

(5) ╳：面積為 $2\times 4=8$




故選(1)(2)(4)。

8. (1)(4)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數律、對數律(換底公式)、指數函數圖形、常用對數函數圖形、指對數函數的伸縮與對稱

解析：(1) ○：因為 $y=a^x$ 的漸近線為 $x$ 軸，而 $y=10^{-2023}$ 在 $x$ 軸上方，因此必定有交點

(2) ╳：三直線的斜率均為正，越傾斜則斜率越大，因此 $m_1<m_3<m_2$

(3) ╳：因為圖形凹口向上，所以 $\overline{PR}$ 在函數圖形上方，設 $\overline{PR}$ 中點為 $K$，則 $\overline{BK}>\overline{BQ}$

又因為 $\overline{AB}=\overline{BC}$，

所以 $\dfrac{\overline{AP}+\overline{CR}}{2}=\overline{BK}>\overline{BQ}$

$\Rightarrow \overline{AP}+\overline{CR}>2\overline{BQ}$

(4) ○：設 $B(0,0)$，則 $Q(0,1)$，

而 $P(-t,a^{-t})$，$R(t,a^t)$，$t>0$

可得 $\overline{AP}\times\overline{CR}=a^{-t}\times a^t=a^{-t+t}=a^0=1$

(5) ○：$y=a^x$ 對稱於 $y=x$ 後得到 $y=\log_a x$ 的圖形，再以 $x$ 軸為基準線，鉛直伸縮為 $\log a$ 倍後，

得到 $\dfrac{y}{\log a}=\log_a x$

$\Rightarrow y=(\log a)\cdot\dfrac{\log x}{\log a}=\log x$，

因此可得到 $y=\log x$ 的圖形

故選(1)(4)(5)。

9. (2)(3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：機率定義、一般排列組合

解析：(1) ╳：丁出布，機率為 $\dfrac{1}{3}$

(2) ○：丙、丁皆出布，機率為 $\dfrac{1\times 1}{3\times 3}=\dfrac{1}{9}$

(3) ○：「丙、丁皆出布」或「丙、丁其中一人出剪刀，另一人出布」，機率為 $\dfrac{1\times 1+2!}{3\times 3}=\dfrac{1}{3}$

(4) ╳：丙、丁兩人出剪刀或石頭，

機率為 $\dfrac{2\times 2}{3\times 3}=\dfrac{4}{9}<\dfrac{1}{2}$

(5) ╳：四人恰好出了三種拳中的某兩種拳，先考慮每人有兩種拳可選，共 $2^4$ 種情形，但四人恰好出同一種拳時無法分出勝負，故機率為

$\dfrac{C^3_2\times(2^4-2)}{3^4}=\dfrac{14}{27}>\dfrac{1}{2}$

〔另解〕

不分勝負的機率為 $\frac{(C_2^4C_1^3)\times 2!+3}{3^4}=\frac{13}{27}$

故能分出勝負的機率為 $1-\frac{13}{27}=\frac{14}{27}>\frac{1}{2}$

故選(2)(3)。

10. (2)(3)(5)

**出處**：第二冊〈數據分析〉

**目標**：迴歸直線 (最適直線) 概念、相關係數概念、標準化數據概念

**解析**：(1) ╳：雖然 $r=-0.8$ 是負相關，但不代表 $x$ 值較大的資料其 $y$ 值一定較小

(2) ○：因迴歸直線必通過 $(\mu_x, \mu_y)$，

故斜率 $m=\frac{4-1}{-2-2}=-\frac{3}{4}>-\frac{4}{5}$

(3) ○：迴歸直線斜率 $m=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，即 $-\frac{3}{4}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{15}{16}<1$

$\Rightarrow \sigma_x>\sigma_y$

(4) ╳：因迴歸直線為 $y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$，而 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 在迴歸直線上，整體來看，21 筆資料比原本 (20 筆) 更接近迴歸直線，相關性更強 (相關係數的絕對值越接近 1)，即相關係數會更接近 $-1$ (變小)

(5) ○：因迴歸直線為 $y-\mu_y=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$，可表示成 $\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}=r\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$，即 $Y=rX$，

換言之，將資料標準化後，新數據的迴歸直線斜率即為原本數據的相關係數

故選(2)(3)(5)。

11. (2)(3)(4)(5)

**出處**：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

**目標**：三角比定義、二倍角公式、餘弦定理

**解析**：(1) ╳：因為 $\tan A=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{4}{\overline{AD}}$，所以 $\overline{AD}=\frac{4}{\tan A}$

(2) ○：$\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{CF}=\overline{BC}-\overline{DE}=6\sin A-4$

(3) ○：$\because \overline{AE}>\overline{DE}=4\Rightarrow\overline{BE}=6-\overline{AE}<2$

$\Rightarrow\overline{EF}<\overline{BE}<2$

〔另解〕$\because \angle BEF=\angle A$

$\therefore \overline{EF}=\frac{\overline{BF}}{\tan A}=\frac{6\sin A-4}{\tan A}$

$=\left(6-\frac{4}{\sin A}\right)\cos A$

$\because \angle A$ 為銳角

$\therefore 0<\sin A<1\Rightarrow\frac{1}{\sin A}>1$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sin A}<-4$

$\Rightarrow 6-\frac{4}{\sin A}<2$，且 $0<\cos A<1$，

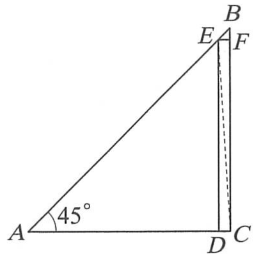
因此 $\overline{EF}<2$

(4) ○：$\overline{AC}=6\cos A$，$\overline{BC}=6\sin A$

$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}(6\cos A)(6\sin A)$

$=9(2\sin A\cos A)=9\sin 2A$

(5) ○：承(4)，$\triangle ABC$ 面積最大值為 9，此時 $\angle A=45^\circ$




可得 $\overline{DE}=\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=4\sqrt{2}$，

$\overline{AC}=6\cos A=3\sqrt{2}$

$\overline{DF}^2=\overline{CE}^2$

$=(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$

$=50-24\sqrt{2}$

故選(2)(3)(4)(5)。

12. (1)(3)(5)

**出處**：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉、第三冊〈指數與對數函數〉

**目標**：截距、斜率概念，三角比(定義)，對數定義、運算

**解析**：(1) ○：$2^4\cdot 7^1=112$，即 $L$ 通過點 $(4, 1)$

(2) ╳：$y=0$ 代入方程式：$2^x=112$

$\Rightarrow x=\log_2 112<\log_2 128=7$，

並知 $L$ 通過點 $(\log_2 112, 0)$

(3) ○：$x=0$ 代入方程式：$7^y=112\Rightarrow y=\log_7 112$，並知 $L$ 通過點 $(0, \log_7 112)$，並由(2)可推知 $L$ 不通過第三象限

〔另解〕

$\because x<0$ 時，$0<2^x<1$；$y<0$ 時，$0<7^y<1$

$\therefore 2^x\cdot 7^y=112$ 不可能有 $x<0$ 且 $y<0$ 的解

可推知 $L$ 不通過第三象限

(4) ╳：$L$ 的斜率 $m=\frac{\log_7 112-0}{0-\log_2 112}=-\frac{\log_7 112}{\log_2 112}$

$=-\frac{\frac{\log 112}{\log 7}}{\frac{\log 112}{\log 2}}=-\frac{\log 2}{\log 7}=-\log_7 2$，

設 $L'$ 斜率為 $m'$，由 $m\cdot m'=(-\log_7 2)\cdot m'=-1$

得 $m'=\log_2 7<\log_2 8=3$

〔另解〕

將原式取對數：$\log(2^x\cdot 7^y)=\log 112$

$\Rightarrow x\cdot\log 2+y\cdot\log 7=\log 112$

$\Rightarrow (\log 2)x+(\log 7)y=\log 112$

得知斜率 $m=-\frac{\log 2}{\log 7}=-\log_7 2$

(5) ○：$L$ 通過 $(\log_2 112, 0)$、$(0, \log_7 112)$

故 $\tan\theta=\frac{\log_7 112}{\log_2 112}=\frac{\frac{\log 112}{\log 7}}{\frac{\log 112}{\log 2}}=\frac{\log 2}{\log 7}=\log_7 2$

〔另解〕

本題之斜率 $m=\tan(180^\circ-\theta)$，

故 $\tan\theta=-m=\log_7 2$

故選(1)(3)(5)。

## 三、選填題

13. $\dfrac{5}{27}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理 (列舉法)、期望值

解析：符合格式 (最簡分數) 的答案有 27 種可能，如下表所示

| 分子 | 1 | 1，2 | 1，3 | 1，2，3，4 | 1，5 | 1，2，3，4，5，6 | 1，3，5，7 | 1，2，4，5，7，8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分母 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

故得分期望值為 $5\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{5}{27}$ (分)。

14. 770

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：觀察數列規律 (同界角概念)、級數 (求和)

解析：$a_2=a_1+\cos\dfrac{\pi}{2}=1+0=1$，

$a_3=a_2+\cos\dfrac{4\pi}{2}=1+1=2$，

$a_4=a_3+\cos\dfrac{9\pi}{2}=2+0=2$，

$a_5=a_4+\cos\dfrac{16\pi}{2}=2+1=3$，

$a_6=a_5+\cos\dfrac{25\pi}{2}=3+0=3$，……

觀察規律可知〈$a_n$〉：1，1，2，2，3，3，……

所求為 $1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+\cdots\cdots+10^2+10^2$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2)$

$=2\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$

$=770$。

註：奇數的平方被 4 除必餘 1，偶數的平方必為 4 的倍數，所以 $\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{9\pi}{2}$、$\dfrac{25\pi}{2}$、……皆為同界角；$\dfrac{4\pi}{2}$、$\dfrac{16\pi}{2}$、$\dfrac{36\pi}{2}$、……皆為同界角。

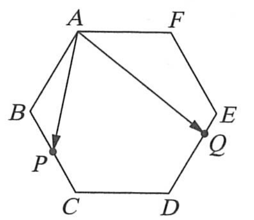
15. 17

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合、向量的內積及性質

解析：因為 $\overline{BP}=\overline{PC}$、$\overline{DQ}=3\overline{QE}$

所以 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:1$、$\overline{DQ}:\overline{QE}=3:1$




利用線性組合可知 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$、

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$$

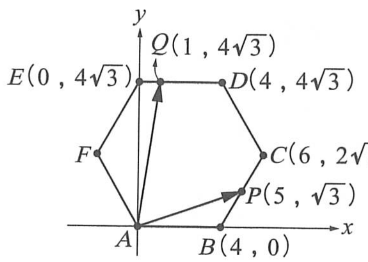
$$=\left(\frac{1}{8}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos 60^\circ\right)+\left(\frac{3}{8}\times\overline{AB}\times\overline{AE}\times\cos 90^\circ\right)+\left(\frac{1}{8}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos 30^\circ\right)+\left(\frac{3}{8}\times\overline{AC}\times\overline{AE}\times\cos 60^\circ\right)$$

$$=\left(\frac{1}{8}\times 4\times 8\times\frac{1}{2}\right)+0+\left(\frac{1}{8}\times 4\sqrt{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\times 4\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)$$

$=2+6+9=17$。

〔另解〕

建立坐標系，如下圖




令 $A$ 為原點，$B(4,0)$，$C(6,2\sqrt{3})$，

則 $D(4,4\sqrt{3})$，$E(0,4\sqrt{3})$

再由分點公式推知 $P(5,\sqrt{3})$，$Q(1,4\sqrt{3})$

故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(5,\sqrt{3})\cdot(1,4\sqrt{3})$

$=5\times 1+\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}$

$=5+12=17$。

16. $-21x+19$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：餘式定理、等差數列與等比數列一般項

解析：$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$，$b_n=1\cdot(-x)^{n-1}$

得 $a_nb_n=(2n-1)\cdot(-x)^{n-1}$

$f(x)=1-3x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots-39x^{19}$

設餘式 $r(x)=mx+n$

則 $1-3x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots-39x^{19}$

$=(x^2-1)\cdot Q(x)+mx+n$

當 $x=1$ 時，$1-3+5-7+\cdots\cdots+37-39=m+n$

$\Rightarrow m+n=-2\times 10=-20$

當 $x=-1$ 時，

$1+3+5+7+\cdots\cdots+37+39=m\cdot(-1)+n$

$\Rightarrow -m+n=\dfrac{(1+39)\times 20}{2}=400$

解 $\begin{cases}m+n=-20\\-m+n=400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-210\\n=190\end{cases}$

得餘式 $r(x)=-210x+190$，因此 $\dfrac{r(x)}{10}=-21x+19$。

17. $\left(\frac{-1}{2}, -4\right)$

**出處**：第一冊〈多項式函數〉

**目標**：除法原理、三次函數的對稱中心

**解析**：設 $f(x)=(x+1)^3(ax+b)+x+1$

又 $\begin{cases} f(1)=-6 \\ f(0)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8\cdot(a+b)+2=-6 \\ 1\cdot(b)+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

得 $f(x)=(x+1)^3(2x-3)+x+1$，

又 $(x+1)^3(2x-3)+x+3=x\cdot g(x)$，

展開整理後為 $2x^4+3x^3-3x^2-6x=x\cdot g(x)$

可得 $g(x)=2x^3+3x^2-3x-6$，而 $y=g(x)$ 的圖形之對稱中心 $x$ 坐標為 $\frac{-3}{3\cdot 2}=\frac{-1}{2}$

而 $g\left(\frac{-1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{-1}{8}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)-3\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)-6=-4$，

故對稱中心坐標為 $\left(\frac{-1}{2}, -4\right)$。

## 第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

**出處**：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

**目標**：極坐標(或廣義角三角比)概念、弧長

**解析**：$\Gamma_1$ 的圖形為「圓心在原點，半徑 1 的第一象限之 $\frac{1}{4}$ 圓弧」，得 $S_1=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\Gamma_2$ 的圖形為「圓心在原點，半徑 2 的第一至第三象限的 $\frac{3}{4}$ 圓弧」

得 $S_2=2\times\frac{3\pi}{2}=3\pi$，故 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3\pi}{\frac{\pi}{2}}=6$，故選(4)。

19. (3 , 1)

**出處**：第三冊〈三角函數〉、第二冊〈三角比〉

**目標**：和角公式、餘弦定理

**解析**：$\overline{PQ}^2=(2\cos 3\theta-\cos\theta)^2+(2\sin 3\theta-\sin\theta)^2$

$=(4\cos^2 3\theta-4\cos 3\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\quad+(4\sin^2 3\theta-4\sin 3\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$=4(\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta)-4(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)$

$\quad+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=5-4\cos 2\theta$

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le 2\theta\le\pi\Rightarrow -1\le\cos 2\theta\le 1$

即 $1\le\overline{PQ}^2\le 9$，所求數對 $(M, m)=(3, 1)$。

〔另解一〕

$\because \angle QOP=2\theta$，所以由餘弦定理知

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos 2\theta$

$=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cos 2\theta=5-4\cos 2\theta$

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le 2\theta\le\pi\Rightarrow -1\le\cos 2\theta\le 1$

即 $1\le\overline{PQ}^2\le 9$，所求數對 $(M, m)=(3, 1)$。

〔另解二〕

$\because \overline{OP}+\overline{OQ}\ge\overline{PQ}$

“=”成立於 $P$、$O$、$Q$ 共線

即 $\angle POQ=2\theta=\pi$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$

此時 $P(0, 1)$、$Q(0, -2)$，所求 $M=1-(-2)=3$

$\because \overline{OQ}-\overline{OP}\le\overline{PQ}$

“=”成立於 $P$、$Q$、$O$ 共線

即 $\angle POQ=2\theta=0$，即 $\theta=0$

此時 $P(1, 0)$、$Q(2, 0)$，所求 $m=2-1=1$

故數對 $(M, m)=(3, 1)$。

◎評分原則

$\overline{PQ}^2=(2\cos 3\theta-\cos\theta)^2+(2\sin 3\theta-\sin\theta)^2$

$=(4\cos^2 3\theta-4\cos 3\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\quad+(4\sin^2 3\theta-4\sin 3\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$=4(\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta)-4(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)$

$\quad+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=5-4\cos 2\theta$　(2 分)

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le 2\theta\le\pi\Rightarrow -1\le\cos 2\theta\le 1$　(2 分)

即 $1\le\overline{PQ}^2\le 9$，所求數對 $(M, m)=(3, 1)$。　(2 分)

〔另解一〕

$\because \angle QOP=2\theta$，所以由餘弦定理知

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos 2\theta$

$=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cos 2\theta=5-4\cos 2\theta$　(2 分)

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le 2\theta\le\pi\Rightarrow -1\le\cos 2\theta\le 1$　(2 分)

即 $1\le\overline{PQ}^2\le 9$，所求數對 $(M, m)=(3, 1)$。　(2 分)

〔另解二〕

$\because \overline{OP}+\overline{OQ}\ge\overline{PQ}$

“=”成立於 $P$、$O$、$Q$ 共線

即 $\angle POQ=2\theta=\pi$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$　(2 分)

此時 $P(0, 1)$、$Q(0, -2)$，所求 $M=1-(-2)=3$　(1 分)

$\because \overline{OQ}-\overline{OP}\le\overline{PQ}$

“=”成立於 $P$、$Q$、$O$ 共線

即 $\angle POQ=2\theta=0$，即 $\theta=0$　(2 分)

此時 $P(1, 0)$、$Q(2, 0)$，所求 $m=2-1=1$　(1 分)

故數對 $(M, m)=(3, 1)$。

20. 面積最大值 1，此時對應的 $Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

**出處**：第二冊〈三角比〉

**目標**：面積公式 $\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)$

**解析**：$\because \angle QOP=2\theta$，

$\triangle OPQ$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin(\angle QOP)$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin 2\theta=\sin 2\theta$

而 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le 2\theta\le\pi$，當 $2\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，$\triangle OPQ$ 面積最大值為 1，此時 $\theta=\frac{\pi}{4}$，

而 $Q\left(2\cos\frac{3\pi}{4}, 2\sin\frac{3\pi}{4}\right)=Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

〔另解〕

$\because\ \overrightarrow{OP}=(\cos\theta, \sin\theta)$，$\overrightarrow{OQ}=(2\cos 3\theta, 2\sin 3\theta)$

$\therefore \triangle OPQ$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ 2\cos 3\theta & 2\sin 3\theta\end{vmatrix}\right|$

$=|\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta|$

$=|\sin 2\theta|$

而 $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0\leq 2\theta\leq\pi$，當 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\triangle OPQ$ 面積最大值為 1，此時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

而 $Q\left(2\cos\dfrac{3\pi}{4}, 2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

◎評分原則

$\because \angle QOP=2\theta$，

$\triangle OPQ$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin(\angle QOP)$ (1 分)

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin 2\theta=\sin 2\theta$ (1 分)

而 $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0\leq 2\theta\leq\pi$，當 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\triangle OPQ$ 面積最大值為 1 (2 分)

此時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，而 $Q\left(2\cos\dfrac{3\pi}{4}, 2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。(2 分)

〔另解〕

$\because\ \overrightarrow{OP}=(\cos\theta, \sin\theta)$，$\overrightarrow{OQ}=(2\cos 3\theta, 2\sin 3\theta)$

$\therefore \triangle OPQ$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ 2\cos 3\theta & 2\sin 3\theta\end{vmatrix}\right|$ (1 分)

$=|\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta|$

$=|\sin 2\theta|$ (1 分)

而 $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0\leq 2\theta\leq\pi$，當 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\triangle OPQ$ 面積最大值為 1 (2 分)

此時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，而 $Q\left(2\cos\dfrac{3\pi}{4}, 2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。(2 分)