台中區高中 113 年(112 學年度)高三上 第一次學測模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 某班 35 位學生期中考數學成績的平均數為 60 分，標準差為 12.3 分，若將班上的最高分(95 分)與最低分(30 分)兩筆資料刪除，另外計算其餘 33 人的成績，得到的新平均數為 μ (分)，新標準差為 σ (分)。試選出下列正確的選項。
   (1) $\mu > 60$ 且 $\sigma \le 12.3$　(2) $\mu < 60$ 且 $\sigma \le 12.3$
   (3) $\mu > 60$ 且 $\sigma > 12.3$　(4) $\mu < 60$ 且 $\sigma > 12.3$
   (5) $\mu < 60$ 但無法確定 σ 與 12.3 的大小關係

答：(2)

解：$|95-60| > |30-60| \Rightarrow \mu < 60$ 且 $\sigma \le 12.3$

2. 設 a 、 b 為非零的兩相異實數，滿足 $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a+10b}{b+10a} = 10^{\log 2}$ ，則將 $\dfrac{b}{a}$ 化為最簡分數為下列何者？
   (1) $\dfrac{5}{4}$　(2) $\dfrac{4}{5}$　(3) 1　(4) 2　(5) $\dfrac{1}{2}$

答：(1)

解：$a(b+10a) + b(a+10b) = 2b(b+10a)$

$\Rightarrow 10a^2 - 18ab + 8b^2 = 0 \xrightarrow{a \ne b} 5a = 4b \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{4}$

3. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，滿足 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$，點 E 為對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 之交點，求 ΔABC 與 ΔACD 之面積比？
   (1) 1：4　(2) 4：1　(3) 3：2　(4) 2：3　(5) 5：2

答：(4)

解：$\overrightarrow{AC} = 5\left[\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right] \Rightarrow \dfrac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \dfrac{2}{3}$

4. 坐標平面上有一光源在 $P(2,k)$ 處，另有一圓 C：$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$，若該光源將圓 C 投射在 x 軸的影長為 $\overline{AB}$ ，且 $\overline{AB}$ 的中點為原點，則下列選項何者最接近 k 值？
   (1) 4.5　(2) 4.6　(3) 4.7　(4) 4.8　(5) 4.9

答：(3)

解：$\because$ 圓心 $(1,2)$，半徑 1　$\therefore$ 過 $P(2,k)$ 必有「鉛直切線」

$\Rightarrow x = 2$，與 x 軸交於 $(2,0)$，則另一切線必過 $(-2,0)$

$\Rightarrow$ 切線斜率：$\dfrac{k}{4}$，切線：$kx - 4y + 2k = 0$

則$\dfrac{\left|k-8+2k\right|}{\sqrt{k^2+16}}=1$ $\Rightarrow 8k^2-48k+48=0$ $\Rightarrow k=3\pm\sqrt{3}$（取正）≒ 4.732

5. 某商品價格的每日漲跌幅呈現「一日上漲10%、再一日下跌10%」每兩日一循環的穩定情形。若該商品一開始的定價為10000元，則幾日後，價格會開始低於原來價格的一半？請選出最適合的選項。
(1) 68日　(2) 69日　(3) 137日　(4) 138日　(5)價格維持在10000元

答：(4)

解：$\left[(1+10\%)(1-10\%)\right]^{\frac{t}{2}}\le\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow\left(\dfrac{100}{99}\right)^{\frac{t}{2}}\ge 2$

$\Rightarrow\dfrac{t}{2}(\log100-\log99)\ge\log2$ $\Rightarrow t\ge\dfrac{2\log2}{2-\log99}$ ≒ $137.\cdots$

6. 某三角形的邊長最大值與最小值相差 4，且三邊長形成等差數列，若其最大內角恰為最小內角的 2 倍，則此三角形面積為下列何者？
(1) $\dfrac{15}{2}$　(2) 15　(3) 30　(4) $\dfrac{15\sqrt{7}}{2}$　(5) $15\sqrt{7}$

答：(5)

解：正弦定律：$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+4}{\sin2\theta}$ $\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{x+4}{2x}$

餘弦定律：$\cos\theta=\dfrac{(x+4)^2+(x+2)^2-x^2}{2(x+4)(x+2)}$

$\Rightarrow$綜合上兩式：$x=8$ $\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\Rightarrow$面積$=\dfrac{1}{2}\times(x+4)(x+2)\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times12\times10\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=15\sqrt{7}$

二、多選題

7. 設 x、y 均為實數，且滿足$\left|x-1\right|\le2$且$\left|x+y\right|\le1$，請選出正確的選項。
(1) $-1\le x\le3$　(2) $-4\le y\le2$　(3) $5\le x^2+y^2\le25$　(4) $x-2y\ge-6$
(5)滿足題意的(x,y)在坐標平面上形成的圖形面積為 24

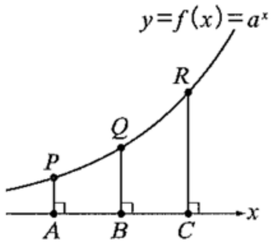
答：(1)(2)(4)

解：$\left|x-1\right|\le2$ $\Rightarrow-1\le x\le3$ $\Rightarrow\begin{cases}0\le x^2\le9\\-3\le-x\le1\end{cases}$

$\left|x+y\right|\le1$ $\Rightarrow-1\le x+y\le1$ $\Rightarrow-4\le y\le2$ $\Rightarrow\begin{cases}0\le y^2\le16\\-4\le-2y\le8\end{cases}$

則$-5\le x-2y\le11$，面積$=8$

8. 函數 $y=f\left(x\right)=a^{x}$ 的部分圖形與 x 軸的關係配置圖如右，其中 A、B、C 分別為 x 軸上由左至右的相異三點，而 P、Q、R 三點 y 坐標均為正數並都在 $y=f\left(x\right)$ 圖形上，且 $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$ 均垂直 x 軸。請選出正確的選項。



(1)直線 $y=10^{-2023}$ 與 $y=f\left(x\right)$ 的圖形必定有交點

(2)設直線 PQ 斜率為 m_1、直線 QR 斜率為 m_2、直線 PR 斜率為 m_3，則 $m_1<m_2<m_3$

(3)若 $\overline{AB}=\overline{BC}$，則 $\overline{AP}+\overline{CR}=2\,\overline{BQ}$

(4)若 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 且 B 為坐標原點，則 $\overline{AP}\times\overline{CR}=1$

(5)先將 $y=a^{x}$ 的圖形對稱於 $y=x$，再以 x 軸為中心（基準線），鉛直伸縮為 $\log a$ 倍，可得到函數 $y=\log x$ 的圖形

答：(1)(4)(5)

解：(1) $y=f\left(x\right)$ 與 $y=\dfrac{1}{10^{2023}}$ 有交點

(2)應為 $m_1<m_3<m_2$

(3) $\overline{AP}=a^{t}$，$\overline{BQ}=a^{t+s}$，$\overline{CR}=a^{t+2s}$ $\Rightarrow \overline{AP}\times\overline{CR}=\overline{BQ}^{2}$

(4) $\overline{AP}=a^{-t}$，$\overline{CR}=a^{t}$ $\Rightarrow \overline{AP}\times\overline{CR}=1$

(5) $y=a^{x}\xrightarrow{\text{關於 } y=x \text{ 成對稱}} y=\log_a x\xrightarrow{\text{鉛直伸縮 }\log a\text{ 倍}}$

$y=\log a\cdot\log_a x=\log x$

9. 甲、乙、丙、丁四人玩猜拳（剪刀、石頭、布）的遊戲，同時出拳一次，請選出正確的選項。

(1)尚未出拳前，甲、乙、丙三人都決定好一定會出剪刀，則此三人能贏拳的機率為 $\dfrac{1}{2}$

(2)尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則恰只有甲、乙贏拳的機率為 $\dfrac{1}{9}$

(3)尚未出拳前，甲、乙兩人都決定好一定會出剪刀，則甲、乙能贏拳的機率為 $\dfrac{1}{3}$

(4)尚未出拳前，甲、乙兩人各自決定好分別一定會出剪刀跟石頭，則猜拳結果能分出勝負的機率大於 $\dfrac{1}{2}$

(5)若四人隨機出拳，則猜拳結果能分出勝負的機率小於 $\dfrac{1}{2}$

答：(2)(3)

解：(1) $1\times1\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

(2) $1\times1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

(3) $1\times1\times\left(\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}_{\text{布布}}+\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times2!}_{\text{布刀}}\right)=\frac{1}{3}$

(4)丙、丁兩人出剪刀或石頭，機率為 $\frac{2\times2}{3\times3}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$

(5)四人恰好出了三種拳中的某兩種拳，先考慮每人有兩種拳可選，共 2^4 種情形，

但四人恰好出同一種拳時無法分出勝負，故機率為 $\frac{C_2^3\times\left(2^4-2\right)}{3^4}=\frac{14}{27}>\frac{1}{2}$

10. 某一組二維數據資料 $\left(x_i, y_i\right)$，$i=1,2,\cdots,20$，已知 x 的平均數 $\mu_x=2$，y 的平均數 $\mu_y=1$，相關係數 $r=-0.8$。此外，y 對 x 的迴歸直線（最適直線）L 通過點 $\left(-2,4\right)$。設 x、y 的標準差分別為 σ_x、σ_y，請選出正確的選項。

(1)若從該組資料中任取 2 筆來比較，則 x 值較大的資料其 y 值較小

(2)迴歸直線（最適直線）L 的斜率大於 -0.8

(3) $\sigma_x>\sigma_y$

(4)若新增一筆資料 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$，再計算 21 筆資料的相關係數為 r'，則 $r'>r$

(5)若令 $X_i=\frac{x_i-2}{\sigma_x}$，$Y_i=\frac{y_i-1}{\sigma_y}$，則 Y 對 X 的迴歸直線（最適直線）斜率為 -0.8

答：(2)(3)(5)

解：(1)無法確定

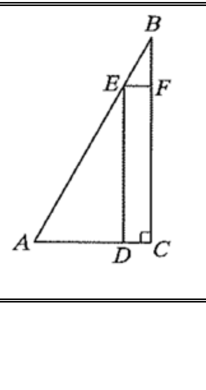
(2) $m=\frac{1-4}{2-\left(-2\right)}=-\frac{3}{4}>-0.8$

(3) $m=r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow-\frac{3}{4}=-\frac{4}{5}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{15}{16}$

(4) $\left(0,\frac{5}{2}\right)\in\left(y-1\right)=-\frac{3}{4}\left(x-2\right)$，使相關性提高，且為負相關，故 $r'<r$

(5)標準化後，Y 對 X 的迴歸直線（最適直線）斜率等於相關係數為 -0.8

11. 如右圖，在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，D、E、F 分別在 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 上，且 $CDEF$ 為長方形，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{DE}=4$，請選出正確的選項。



(1) $\overline{AD}=4\tan A$　　(2) $\overline{BF}=6\sin A-4$

(3) $\overline{EF}<2$　　(4) ΔABC 面積為 $9\sin2A$

(5)當 ΔABC 面積為最大值時，$\overline{DF}^2=50-24\sqrt{2}$

答：(2)(3)(4)(5)

解：(1)應為 $\overline{AD}=\overline{DE}\cot A=4\cot A$

(2) $\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{CF}=\overline{AB}\sin A-\overline{DE}=6\sin A-4$

(3)顯然 $\underbrace{\overline{EF}}_{\text{橫股}}<\underbrace{\overline{BE}}_{\text{斜邊}}=\underbrace{\overline{AB}-\overline{AE}}_{\text{減大，結果較小}}<\underbrace{\overline{AB}-\overline{DE}}_{\text{減小，結果較大}}=6-4=2$

(4) ΔABC 面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6\cos A\times 6\sin A=9\left(2\sin A\cos A\right)=9\sin 2A$

(5)當 $A=45°$ 時，ΔABC 有 Max

此時 $\overline{DF}^2=\overline{DE}^2+\overline{EF}^2=4^2+\left[\overline{BF}\cot A\right]^2=4^2+\left[6\times\frac{\sqrt{2}}{2}-4\right]^2$

$=16+\left[18-24\sqrt{2}+16\right]=50-24\sqrt{2}$

12. 已知滿足方程式 $2^x\cdot 7^y=112$ 的所有數對 (x,y) 在坐標平面上會形成一直線 L，請選出正確的選項。
(1) L 通過點 $(4,1)$　(2) L 的 x 截距大於 7
(3) L 不通過第三象限　(4)若直線 L' 與 L 垂直，則 L' 的斜率大於 3
(5)若 θ 為 L 與 x 軸所夾的銳夾角，則 $\tan\theta=\log_7 2$

答：(1)(3)(5)

解：(1) $2^x\cdot 7^y=112\Rightarrow x\log 2+y\log 7=\log 112$，過 $(4,1)$

(2) x 截距 $=\frac{\log 112}{\log 2}=4+\frac{\log 7}{\log 2}\fallingdotseq 4+\frac{0.8451}{0.3010}\fallingdotseq 6.80\cdots$

(3) y 截距 $=\frac{\log 112}{\log 7}=\frac{4\log 2}{\log 7}+1\fallingdotseq 4\times\frac{0.3010}{0.8451}+1\fallingdotseq 2.42\cdots$

故 L 不過第三象限

(4) L 斜率 $=-\frac{\log 2}{\log 7}$，L' 斜率 $=\frac{\log 7}{\log 2}\fallingdotseq 2.80\cdots$

(5) $\tan\theta=\left|-\frac{\log 2}{\log 7}\right|=\log_7 2$

三、選填題

13. 關於學測數學試題的選填題，須答對該題全部空格才能得到 5 分，但答錯不倒扣。
下方是某一選填題的最後一段文字，

隨機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為 $\dfrac{\text{(18-1)}}{\text{(18-2)}}$。(化為最簡分數)

考生小豪在考試時間截止前半分鐘還解不出來，但他知道答案是一個小於 1 的正數，只好在答案卡該兩格隨機劃記符合格式(最簡分數)的答案，
則小豪本題得分之期望值為_______分。(化為最簡分數)

答：$\frac{5}{27}$

解：符合格式（最簡分數）的答案有 27 種可能，如下表所示：

分子	1	1，2	1，3	1，2，3，4	1，5	1，2，3，4，5，6	1，3，5，7	1，2，4，5，7，8
分母	2	3	4	5	6	7	8	9

正確答案僅一種，機率為$\dfrac{1}{27}$

故得分期望值為$5\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{5}{27}$（分）

14. 已知數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+\cos\dfrac{n^2\pi}{2} \end{cases}$($n$為正整數)，

則此數列前 20 項之平方和$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{19}^2+a_{20}^2=$_______。

答： 770

解：奇數的平方必為 4 的倍數加 1，偶數的平方必為 4 的倍數，

所以$\cos\dfrac{n^2\pi}{2}$中：$\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{9\pi}{2}$、$\dfrac{25\pi}{2}$、…皆為同界角：

$\dfrac{4\pi}{2}$、$\dfrac{16\pi}{2}$、$\dfrac{36\pi}{2}$、…皆為同界角。

$a_2=a_1+\cos\dfrac{\pi}{2}=1+0=1$，

$a_3=a_2+\cos\dfrac{4\pi}{2}=1+1=2$，

$a_4=a_3+\cos\dfrac{9\pi}{2}=2+0=2$，

$a_5=a_4+\cos\dfrac{16\pi}{2}=2+1=3$，

$a_6=a_5+\cos\dfrac{25\pi}{2}=3+0=3$，……

觀察規律可知$\langle a_n \rangle$：$1,1,2,2,3,3,\cdots$

所求為$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+\cdots+10^2+10^2$

$=2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2\right)=2\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=770$

15. 正六邊形$ABCDEF$的邊長 4，若P、Q分別為$\overline{BC}$、$\overline{DE}$上的點，

滿足$\overline{BP}=\overline{PC}$、$\overline{DQ}=3\overline{QE}$，試求(內積)$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=$_______。

答： 17

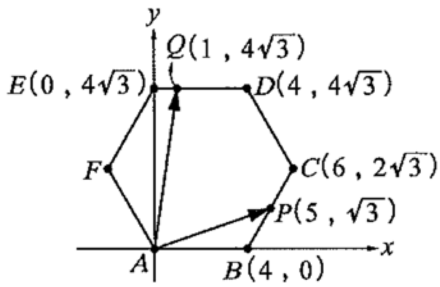
解：$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C\left(6,2\sqrt{3}\right)$，

則$D\left(4,4\sqrt{3}\right)$，$E\left(0,4\sqrt{3}\right)$

再由分點公式推知$P\left(5,\sqrt{3}\right)$，$Q\left(1,4\sqrt{3}\right)$

故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(5,\sqrt{3}\right)\cdot\left(1,4\sqrt{3}\right)$

$=5\times1+\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=5+12=17$



16.設多項式 $f\left(x\right)$以升冪排列共有 20 項，且第k項均可表示為$a_k b_k$，
其中a_1，a_2，……，a_{20}是一個首項為 1，公差為 2 的等差數列；
b_1，b_2，……，b_{20}滿足$b_1=1$，$b_{k+1}=-x\cdot b_k$，其中$k=1,2,\cdots\cdots,19$。
若$f\left(x\right)$除以x^2-1的餘式為$r\left(x\right)$，則$\dfrac{r\left(x\right)}{10}=$_______。

答：$-21x+19$

解：$a_n=1+\left(n-1\right)\cdot2=2n-1$，$b_n=1\cdot\left(-x\right)^{n-1}$

得$a_n b_n=\left(2n-1\right)\cdot\left(-x\right)^{n-1}$，

則 $f\left(x\right)=1-3x+5x^2-7x^3+\cdots-39x^{19}=\left(x^2-1\right)\cdot Q\left(x\right)+mx+n$

當$x=1$時，$1-3+5-7+\cdots+37-39=m+n\Rightarrow m+n=-2\times10=-20$

當$x=-1$時，$1+3+5+7+\cdots+37+39=m\cdot\left(-1\right)+n\Rightarrow -m+n=\dfrac{\left(1+39\right)\times20}{2}=400$

$\Rightarrow\begin{cases}m=-210\\n=190\end{cases}$，得餘式$r\left(x\right)=-210x+190$，因此$\dfrac{r\left(x\right)}{10}=-21x+19$

17.已知 $f\left(x\right)$為滿足下列三個條件的四次多項式：
① $f\left(x\right)$除以$\left(x+1\right)^3$的餘式為$x+1$。
② $f\left(x\right)$的所有係數和為-6。
③ $f\left(x\right)$的常數項為-2。
而另一多項式$g\left(x\right)$滿足 $f\left(x\right)+2=x\cdot g\left(x\right)$，
則$y=g\left(x\right)$的圖形之對稱中心坐標為_______。(化為最簡分數)

答：$\left(\dfrac{-1}{2},-4\right)$

解：設 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^3\left(ax+b\right)+x+1$

又$\begin{cases}f\left(1\right)=-6\\f\left(0\right)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\cdot\left(a+b\right)+2=-6\\1\cdot\left(b\right)+1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$

得 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^3\left(2x-3\right)+x+1$，得$\left(x+1\right)^3\left(2x-3\right)+x+3=x\cdot g\left(x\right)$

則$g\left(x\right)=2x^3+3x^2-3x-6=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-4$，

故對稱中心坐標為$\left(\dfrac{-1}{2},-4\right)$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，今有兩動點 $P(\cos\theta,\sin\theta)$、$Q(2\cos3\theta,2\sin3\theta)$，其中 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，試回答下列問題。

18.若所有動點 P 形成的圖形為 Γ_1，所有動點 Q 形成的圖形為 Γ_2，兩圖形的長度分別為 S_1、S_2，則 S_2、S_1 的比值 $\frac{S_2}{S_1}$ 為下列哪個選項？

(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 6　(5) $\frac{9}{4}$

答：(4)

解：$P(\cos\theta,\sin\theta)\in x^2+y^2=1$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow S_1=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$Q(2\cos3\theta,2\sin3\theta)\in x^2+y^2=4$，$0\le3\theta\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow S_2=2\times\frac{3\pi}{2}=3\pi$

故 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3\pi}{\frac{\pi}{2}}=6$

19.試求出兩動點的距離 $\overline{PQ}$ 之最大值 M 及最小值 m，以數對 (M,m) 表示答案。

答：$(3,1)$

解：
$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=(2\cos3\theta-\cos\theta)^2+(2\sin3\theta-\sin\theta)^2\\&=4\left(\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta\right)+\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-4(\cos3\theta\cos\theta+\sin3\theta\sin\theta)\\&=5-4\cos2\theta\end{aligned}$$

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le2\theta\le\pi\ \Rightarrow -1\le\cos2\theta\le1$，

即 $1\le\overline{PQ}^2\le9$，所求數對 $(M,m)=(3,1)$

20.試求出 ΔOPQ 面積的最大值及此時對應的 Q 點坐標。

答：面積最大值 1，此時對應的 $Q\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

解：$\because \angle QOP=2\theta$，

ΔOPQ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin(\angle QOP)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin2\theta=\sin2\theta$

而 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow 0\le2\theta\le\pi$，當 $2\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，ΔOPQ 面積最大值為 1，此時 $\theta=\frac{\pi}{4}$，

而 $Q\left(2\cos\frac{3\pi}{4},2\sin\frac{3\pi}{4}\right)=Q\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$