全國公私立高級中學112學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學A考科解析

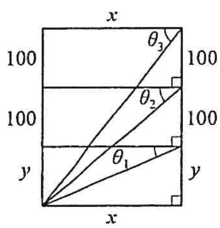
考試日期：112年11月1~2日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	13-1	14-1
3	4	2	3	5	5	15	1245	1245	1235	35	8	8	8	2
14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	18	19-1	20			
1	1	0	3	−	7	5	5	5	5	6				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

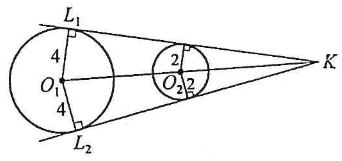
1. 若 (x_0, y_0) 為格子點，則 $m=\dfrac{y_0}{x_0}$ 為有理數。
   選項(1)(2)(4)(5)皆不是有理數，
   選項(3) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{2}}=\log_{2^{-2}}2^{\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{-2}\log_2 2=-\dfrac{1}{8}$，
   故選(3)。
2. 二次函數開口向上 $\therefore a>0$
   又頂點的 x 坐標：$-\dfrac{b}{2a}>0$ $\therefore b<0$
   與 y 軸交點為 $(0, c)$ $\therefore c>0$
   指對數圖形當 $a>1$，皆為遞增函數；$0<a<1$，皆為遞減函數。
   $y=b+a^x$、$y=c+\log_a x$ 分別由 $y=a^x$ 向下平移、
   $y=\log_a x$ 向上平移得之。
   故選(4)。
3. $\dfrac{\frac{C_1^7C_3^6C_3^3}{2!}}{\frac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}}=\dfrac{1}{4}$，
   故選(2)。
4. 標準化後的平均數為 0、標準差為 1，
   又迴歸直線斜率 $m=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，
   故新的迴歸直線會過原點，且斜率為 r。
   由圖可知：$-1<r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}<0$，又 $\sigma_Y>\sigma_X$
   所以新的斜率為 r 會比原來斜率大且 $-1\le r<0$。
   故選(3)。
5. $\tan\theta_1=\dfrac{y}{x}$，
   $\tan\theta_2=\dfrac{y+100}{x}$，
   $\tan\theta_3=\dfrac{y+200}{x}$ 為等差數列，
   故選(5)。



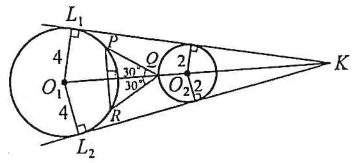
6. 原函數圖形的週期為 π；振幅在 2~2.5 之間，
   依選項可確定振幅為 $\sqrt{5}$，
   令函數 $f(x)=\sqrt{5}\sin(2x+\theta)\Rightarrow f(0)=\sqrt{5}\sin\theta$，
   又由圖可知 $\dfrac{3}{2}<\sqrt{5}\sin\theta<2\Rightarrow\dfrac{3}{2\sqrt{5}}<\sin\theta<\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，
   依選項可確定 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。
   所以原函數圖形為 $f(x)=\sqrt{5}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$。
   但要產生相反的波形：
   $-f(x)=-\sqrt{5}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{5}\sin(-2x-\dfrac{\pi}{3})$ 才能抵銷噪音。
   故選(5)。

二、多選題

7. (1) ○：$\sqrt{(-4x+2)^2}=|-4x+2|=|4x-2|$。
   (2) × (3) ×：$a<0$ 時不合。
   (4) ×：$|4x-2|<2a\Leftrightarrow|2x-1|<a\Leftrightarrow|-2x+1|<a$。
   (5) ○：$-3<|4x-2|<|a|\Leftrightarrow\begin{cases}|4x-2|<|a|\\-3<|4x-2|\end{cases}$
   $\Leftrightarrow\begin{cases}|4x-2|<|a|\\x\in R\end{cases}\Leftrightarrow|4x-2|<|a|$。
   故選(1)(5)。
8. (1) ○：觀察三次方項係數，得 $a=1$，
   $f(1)=1=27+9b+54+c\Rightarrow 9b+c=-80$……①，
   $f(0)=1-p+1=8+4b+36+c$
   $\Rightarrow 4b+c+p=-42$……②，
   $f(-1)=-8+8-2p+1=1+b+18+c$
   $\Rightarrow b+c+2p=-18$……③，
   由①②③可得 $\Rightarrow b=-7$，$c=-17$，$p=3$。
   (2) ○：$f(0.98)=(-0.02)^3+2(-0.02)^2+3(-0.02)+1$
   ≈ 0.94。
   (3) ×：$f(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+1$
   其對稱中心非 $(1, 1)$。
   (4) ○：$f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為
   $y=3(x-1)+1=3x-2$。
   (5) ○：三次函數與 x 軸必有交點。
   故選(1)(2)(4)(5)。
9. (1)(2) ○：已知 $O_1(0, 0)$，$O_2(6, 1)$，$\overline{O_1O_2}=\sqrt{37}$。
   $\overline{PQ}$ 最小值 $=\sqrt{37}-4-2=\sqrt{37}-6$，
   $\overline{PQ}$ 最大值 $=\sqrt{37}+4+2=\sqrt{37}+6$。
   (3) ×：兩圓外離，所以同時與圓 C_1、圓 C_2 相切的直線有 4 條（2 外公切線、2 內公切線）。
   (4) ○：因為 $\overline{O_1O_2}:\overline{O_2K}=1:1\Rightarrow K(12, 2)$。如下圖所示。



   (5) ○：在圓 C_1 取一點 P，使得 $\angle PQO_1=30°$，
   在圓 C_1 取一點 R，使得 $\angle RQO_1=30°$，
   則△PQR 為正三角形。



   故選(1)(2)(4)(5)。
10. (1) ○：$\dfrac{31.1+30.1+30.3+30.1+30.4}{5}=30.4$。
    (2) ○：$\sqrt{\dfrac{1}{5}[(0.7)^2+(-0.3)^2+(-0.1)^2+(-0.3)^2]}<1$。
    (3) ○：98 無鉛汽油價格 = 95 無鉛汽油價格 + 2 元
    = 92 無鉛汽油價格 + 4 元，
    故標準差皆一樣。

(4) ×：超級/高級柴油價格的變化較小，故標準差較小。
(5) ○：最後一次漲 0.3 元/公升，
故台灣中油吸收了 0.1 元/公升。
故選(1)(2)(3)(5)。

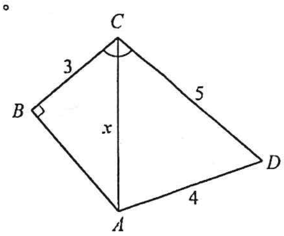
11. (1) ×：Ⅰ→Ⅱ→Ⅲ：$3\cdot2\cdot(2^4-1)=90$ 種。
(2) ×：Ⅰ→Ⅱ→Ⅲ：$3\cdot(C_3^4\cdot2)\cdot(2^2\cdot1^2)=96$ 種。
(3) ○
(4) ×：$3\cdot[2\cdot1^4+4(2^2\cdot1^2)]=54$ 種
(Ⅱ區有 2 種同色相對的情況，其餘有 4 種)。
(5) ○：由(1)(2)(4)：共 $90+96+54=240$ 種。
故選(3)(5)。

三、選填題

12. 設小賴的分數為 x 分，
$\mu=\dfrac{82+84+85+86+x}{5}=\dfrac{x+337}{5}$ 為整數，
所以 $x=83$ 或 88，
若 $x=83$，則 $\mu=84$，$\sigma=\sqrt{\dfrac{4+1+0+1+4}{5}}=\sqrt{2}$ 不合，
若 $x=88$，則 $\mu=85$，$\sigma=\sqrt{\dfrac{9+1+0+1+9}{5}}=2$，
所以 $x=88$。

13. 設 A 點坐標為 $(t,\log_a t)$，B 點坐標為 $(s,\log_a s)$，
因為 A 點為 $\overline{OB}$ 的中點 $\Rightarrow\begin{cases}s=2t\\ \log_a s=2\log_a t\end{cases}\Rightarrow t=2$，
A 點亦在直線 $y=x$ 上，因此 $t=\log_a t=2$，
則 $\overline{OA}^2=t^2+(\log_a t)^2=4+4=8$。

14. 令 $\overline{AC}=x$，
$\cos(\angle BCA)=\cos\angle ACD$
$\Rightarrow\dfrac{3}{x}=\dfrac{5^2+x^2-4^2}{2\cdot5\cdot x}$
$\Rightarrow x=\sqrt{21}$。



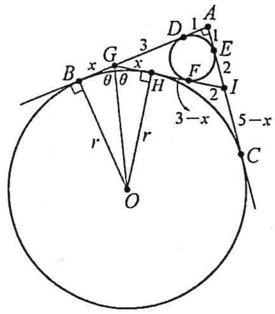
15. A 點旋轉了 -5 弳，
故圓 C 的圓心往右前進 $2\times5=10$ 單位，
圓 C 碰到直線 L 時圓心為 $O'(-2,2)$，
又 L 過點 $(8,0)$，令 $L：y=m(x-8)\Rightarrow mx-y-8m=0$，
則 $d(O',L)=\dfrac{|-2m-2-8m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
$\Rightarrow|-5m-1|=\sqrt{m^2+1}\Rightarrow m=-\dfrac{5}{12}$ 或 0(不合)，
所以 y 截距為 $-\dfrac{5}{12}\times(-8)=\dfrac{10}{3}$。
<另解>
令停止時，圓 C 與 x 軸的切點為 $B(-2,0)$，$P(8,0)$，
$m=-\tan(2\angle O'PB)=-\dfrac{\frac{2}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=-\dfrac{5}{12}$，
所以 y 截距為 $-\dfrac{5}{12}\times(-8)=\dfrac{10}{3}$。

16. 設 $A(4,-5)$ 對於 L_1 的對稱點為 $D(8,-1)$，
對於 L_2 的對稱點為 $E(-2,13)$，
則直線 DE 即為直線 BC，
斜率為 $\dfrac{-1-13}{8-(-2)}=-\dfrac{7}{5}$。

17. 坐標化令 $E(0,0)$、$D(1,0)$、$A(0,-\sqrt{3})$、$B(1,-\sqrt{3})$、
$C(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，且 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$0\le\theta\le\frac{4}{3}\pi$，
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\cos\theta-1,\sin\theta+\sqrt{3})$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$，
當 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ (即 $\theta=\frac{\pi}{6}$) 時，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最大值 $\sqrt{3}$，
所求 $=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BP}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。
<另解>
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EP})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EP}$，
故當 $\overrightarrow{EP}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 同向時，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最大值，此時 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$。
所求 $=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $\overline{AD}=\overline{AE}=1$，$\overline{GF}=\overline{GD}=3$，$\overline{EI}=\overline{FI}=2$，
所以 $\overline{AG}=4$，$\overline{AI}=3$，$\overline{GI}=5$，
$\triangle AGI$ 為直角三角形，
$\cos\angle AGI=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GI}}=\dfrac{4}{5}$，
故選(5)。



19. 令 $\overline{GB}=\overline{GH}=x$，
$\overline{HF}=3-x$，
$\overline{IH}=\overline{IC}=5-x$，
因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，
所以 $1+3+x=1+2+5-x$，$x=2$
$\Rightarrow\overline{AB}=x+4=6$。

20. 令大圓圓心為 O，半徑為 r，$\angle OGB=\angle OGH=\theta$，
$\tan\angle AGI=\tan(180^\circ-2\theta)=-\tan2\theta=\dfrac{3}{4}$，$\tan\theta=\dfrac{r}{2}$ (2分)
$-\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{-r}{1-\frac{r^2}{4}}=\dfrac{3}{4}$，(2分)
$-4r=3-\dfrac{3r^2}{4}$，$3r^2-16r-12=0$，
$(r-6)(3r+2)=0$，$r=6$ 或 $-\dfrac{2}{3}$，(負不合)
所以 $r=6$。(3分)