數學A考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(3)	(1)	(4)	(3)	(1)(2)(4)	(1)(3)
8.	9.	10.				
(1)(2)(3)(5)	(2)(3)(4)	(1)(4)(5)				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的圖形

解析：因為 $f(x)=x^3-9x^2+21x-12$

$=x^3-3x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3+21x-12-27x+27$

$=(x-3)^3-6x+15=(x-3)^3-6(x-3)-3$

所以對稱中心為 $(3,-3)$，故選(2)。

〈另解〉

三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+21x-12$ 其對稱中心 x 坐標為

$\dfrac{-b}{3a}=\dfrac{-(-9)}{3\times 1}=3$

則 y 坐標為 $f(3)=3^3-9\cdot 3^2+21\cdot 3-12=-3$

所以對稱中心為 $(3,-3)$，故選(2)。

2. (3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

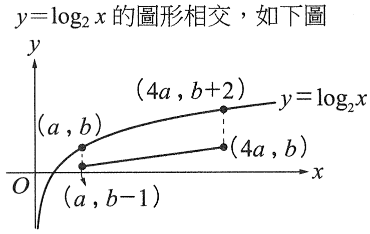
目標：對數函數與指數函數的圖形

解析：(1)╳：$(a,-b)$ 才會在 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形上

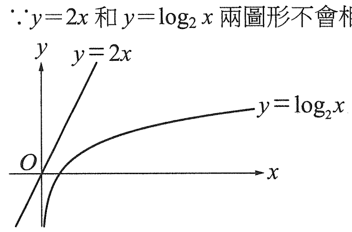
(2)╳：(a,b)、$(4a,b+2)$ 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，

且 $y=\log_2 x$ 是凹口向下的圖形，

所以 $(a,b-1)$ 和 $(4a,b)$ 所形成的線段不會和 $y=\log_2 x$ 的圖形相交，如下圖



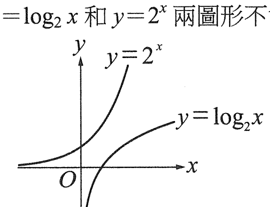
(3)○：$\because y=2x$ 和 $y=\log_2 x$ 兩圖形不會相交，如下圖



$\therefore y=\log_2 x$ 圖形上不會有點和原點所形成的直線斜率大於等於 2

(4)╳：$y=\log_2 x$ 的圖形只會通過一、四象限

(5)╳：$y=\log_2 x$ 和 $y=2^x$ 兩圖形不會相交，如下圖



故選(3)。

3. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：一元一次不等式

解析：$\because \begin{cases}3x-a\le 0\\5x-b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{a}{3}\\x>\dfrac{b}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{b}{5}<x\le\dfrac{a}{3}$ 的整數解為 2、3、4、5

$\therefore 5\le\dfrac{a}{3}<6\Rightarrow 15\le a<18$

$\Rightarrow a=15，16，17$

且 $1\le\dfrac{b}{5}<2\Rightarrow 5\le b<10$

$\Rightarrow b=5，6，7，8，9$

$\therefore a+b$ 的值為 20、21、22、23、24、25、26

故選(1)。

4. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合、二項式定理

解析：密碼為 3 位數且由左而右愈來愈小的方法數有 C_3^{10} 種，密碼為 4 位數且由左而右愈來愈小的方法數有 C_4^{10} 種，以此類推，密碼為 10 位數且由左而右愈來愈小的方法數有 C_{10}^{10} 種

故密碼的選擇有 $C_3^{10}+C_4^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$ 種

由 $(1+x)^n=C_0^n x^0+C_1^n x+\cdots\cdots+C_n^n x^n$

知 $C_3^{10}+C_4^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$

$=(1+1)^{10}-C_0^{10}-C_1^{10}-C_2^{10}=968$ 種

故選(4)。

5. (3)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：內積的運算

解析：$3x+4y=5$ 可以看成直線上任一點 (x,y) 和 $(3,4)$ 的內積為 5，

所以 $(6,8)\cdot(x,y)=10$，

因此可以知道 C 點為 $(6,8)$，

代入選項知 C 點在 $x+y=14$ 的直線上

故選(3)。

〈另解〉

$3x+4y=5\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}+4t\\y=0-3t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

設 $P\left(\dfrac{5}{3}+4t,-3t\right)$，$C(x,y)$

則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=10\Rightarrow\left(\dfrac{5}{3}+4t,-3t\right)\cdot(x,y)=10$

$\Rightarrow\left(\dfrac{5}{3}x-10\right)+t(4x-3y)=0$，對所有實數 t 均成立

$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{3}x-10=0\\4x-3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$

所以 $C(6,8)$

代入選項知 C 點在 $x+y=14$ 的直線上

故選(3)。

二、多選題

6. (1)(2)(4)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：三角函數的疊合、三角函數的圖形

解析：$f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1)○：週期為 2π

(2)○：$0\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow -\dfrac{\pi}{4}\le x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$

故當 $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2}$

(3)╳：當 $x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$ 時，$f(x)$ 有最小值 -1

(4)○：$y=-\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\sin(x-\pi)$，

向左平移 $\dfrac{3\pi}{4}$ 單位就會變成 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(5)╳：對稱軸為 $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，其中 k 為整數

故選(1)(2)(4)。

7. (1)(3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩直線的關係

解析：(1)○：$\because L_1$ 與 L_2 的斜率分別為 $\dfrac{3}{2}$ 與 $\dfrac{2}{-k}$

又 L_1 與 L_2 平行

$\therefore \dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{-k}\Rightarrow k=\dfrac{-4}{3}$

(2)╳：$\because y=mx+m-2=m(x+1)-2$

$\therefore$ 必過 $(-1,-2)$

(3)○：$\because L_1$ 與 L_3 垂直

$\therefore \dfrac{3}{2}m=-1$

$\Rightarrow m=\dfrac{-2}{3}$

(4)╳：當 $m=\dfrac{3}{2}$ 時 L_1 與 L_3 為同一直線

(5)╳：$\because L_1$ 與 L_2 平行

L_1：$3x-2y-1=0\Rightarrow 6x-4y-2=0$

L_2：$2x-\dfrac{4}{3}y+1=0\Rightarrow 6x-4y+3=0$

$\therefore d(L_1,L_2)=\dfrac{|-2-3|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

故選(1)(3)。

8. (1)(2)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：標準差、相關係數

解析：$\mu_y=\dfrac{53+51+a+b+59}{5}=\dfrac{163+a+b}{5}$

迴歸直線必過 (μ_x,μ_y)，

故 $\mu_y=\dfrac{9}{8}\mu_x+\dfrac{27}{2}=\dfrac{9}{8}\times 36+\dfrac{27}{2}=54$

由 $\mu_y=54=\dfrac{163+a+b}{5}$，知 $a+b=107$ ………①

由迴歸直線斜率為

$r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$=\dfrac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$=\dfrac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x^{\ 2}}$

$=\dfrac{(-1)(-1)+(-1)(-3)+(-2)(a-54)+1\cdot(b-54)+3\cdot 5}{5\cdot\dfrac{16}{5}}$

$=\dfrac{9}{8}$

整理得 $-2a+b=-55$ ………………………………②

由①、②知 $a=54$，$b=53\Rightarrow a>b$

$\sigma_y=$

$\sqrt{\dfrac{1}{5}((53-54)^2+(51-54)^2+(54-54)^2+(53-54)^2+(59-54)^2)}$

$=\sqrt{\dfrac{36}{5}}$

$\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{36}{5}}}{\sqrt{\dfrac{16}{5}}}=\dfrac{3}{2}>1$，迴歸直線斜率 $r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{9}{8}$

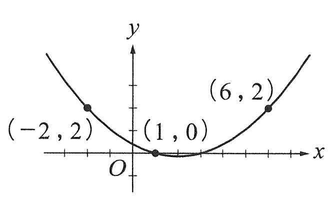
$\Rightarrow r=\dfrac{3}{4}=0.75$，故選(1)(2)(3)(5)。

9. (2)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理與因式定理

解析：



(1)╳：$\because f(1)=0$，$f(-2)=f(6)=2$

$\therefore$ 二次函數的圖形開口向上且在 $x=2$ 時有最小值

(2)○：$\because f(-1)=a-b+c$

$\therefore$ 由圖知 $f(-1)=a-b+c>0$

(3)○：$\because f(-2)=f(6)$

$\therefore$ 對稱軸為 $x=\dfrac{6+(-2)}{2}=2$

(4)○：設 $f(x)=a(x+2)(x-6)+px+q$

$\because f(-2)=f(6)=2$

$\therefore \begin{cases}-2p+q=2\\ 6p+q=2\end{cases}$

$\therefore p=0$，$q=2$

故所求餘式為 2

(5)╳：設 $f(x)=a(x-1)(x+2)+mx+n$

$\because f(1)=0$ 且 $f(-2)=2$

$\therefore \begin{cases}m+n=0\\ -2m+n=2\end{cases}$

$\therefore m=\dfrac{-2}{3}$，$n=\dfrac{2}{3}$

故所求餘式為 $\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

故選(2)(3)(4)。

〈另解〉

$\because f(-2)=f(6)=2$ 且 $f(1)=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+c=a(x-2)^2+k$

則 $f(1)=0=a+k$

$f(-2)=2=16a+k$

$\therefore a=\dfrac{2}{15}$，$k=-\dfrac{2}{15}$

故 $f(x)=\dfrac{2}{15}(x-2)^2-\dfrac{2}{15}$

(1) ╳：當 $x=2$ 時，$f(x)$ 有最小值 $-\dfrac{2}{15}$

(2) ○：$f(-1)=a-b+c=\dfrac{2}{15}(-1-2)^2-\dfrac{2}{15}$

$=\dfrac{16}{15}>0$

(3) ○：對稱軸為 $x=2$

(4) ○：$f(x)=\dfrac{2}{15}(x-2)^2-\dfrac{2}{15}$

$=\dfrac{2}{15}(x^2-4x+4)-\dfrac{2}{15}$

$=\dfrac{2}{15}(x^2-4x+3)$

$=\dfrac{2}{15}((x+2)(x-6)+15)$

$=\dfrac{2}{15}(x+2)(x-6)+2$

$\therefore$ 餘式為 2

(5) ╳：$f(x)=\dfrac{2}{15}(x-2)^2-\dfrac{2}{15}$

$=\dfrac{2}{15}(x^2-4x+4)-\dfrac{2}{15}$

$=\dfrac{2}{15}((x-1)(x+2)-5x+5)$

$=\dfrac{2}{15}(x-1)(x+2)-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ 餘式為 $-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

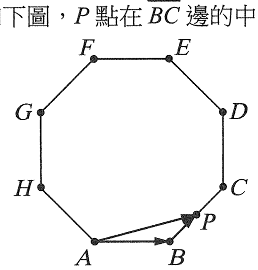
故選(2)(3)(4)。

10. (1)(4)(5)

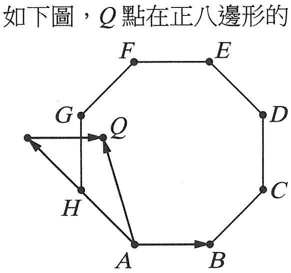
出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈平面向量〉

目標：正弦定理、向量的線性組合

解析：(1) ○：如下圖，P 點在 $\overline{BC}$ 邊的中點



(2) ╳：如下圖，Q 點在正八邊形的內部

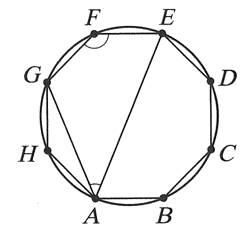


(3) ╳：$\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{HE}$ 兩向量互相平行，

若 $\overrightarrow{AR}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 不平行，則無法表示成

$x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{HE}$

(4) ○：正八邊形的外接圓如下圖



則可知 $\angle EAG+\angle EFG$

$=\dfrac{1}{2}(EFG$ 弧 $+EAG$ 弧$)=\pi$

即 $\angle EAG=\pi-\angle EFG$

所以 $\sin\angle EAG=\sin\angle EFG$

(5) ○：三角形 EAD 和三角形 GFD 的外接圓都是同一個，若此圓半徑為 R

則由正弦定理知道 $\dfrac{\overline{ED}}{\sin\angle EAD}=2R=\dfrac{\overline{GD}}{\sin\angle GFD}$

故選(1)(4)(5)。

三、選填題

11. $\dfrac{29}{18}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：數學期望值

解析：可能的金額為 $5+2$，$8+6$，$4+3$，$5+4$，$9+7$，$2+3$，

其發生的機率皆為 $\dfrac{1}{C^9_2}=\dfrac{1}{36}$

故玩遊戲一次所得獎金的期望值為

$7\cdot\dfrac{1}{36}+14\cdot\dfrac{1}{36}+7\cdot\dfrac{1}{36}+9\cdot\dfrac{1}{36}+16\cdot\dfrac{1}{36}$

$+5\cdot\dfrac{1}{36}$

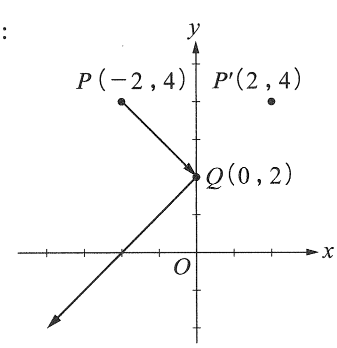
$=\dfrac{29}{18}$ 元。

12. $(-8,-6)$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式的應用

解析：



如上圖，P 點對 y 軸的對稱點為 $P'(2,4)$

則由 P 射向 Q 後反射後的直線方程式為

$\overleftrightarrow{P'Q}$：$x-y=-2$

將 $x=-8$ 代入得 $y=-6$

故反射後會射中位於 $(-8,-6)$ 的目標。

13. 8

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數函數應用、複利計算

解析：假設欠的卡費為 x 元，

則經過 n 年後欠的錢為 $x(1+10\ \%)^n$

由題目可列出 $2x<x(1+10\ \%)^n$，

即 $2<(1.1)^n$

$\Rightarrow 10^{0.3010}<(10^{0.0414})^n=10^{0.0414n}$

$\Rightarrow 0.3010<0.0414n$

$\Rightarrow n>\dfrac{0.3010}{0.0414}\approx 7.27$

則 n 至少為 8。

14. 324

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列、等差級數

解析：等差數列第 n 項為 $a_n=20+(n-1)(-3)=-3n+23$

$-3n+23>0\Rightarrow n<\dfrac{23}{3}=7.\cdots\cdots$，

表示前 7 項皆為正，第 8 項至第 20 項為負

且 $a_8=-3\times 8+23=-1$

故 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_{19}|+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_7)-(a_8+a_9+\cdots\cdots+a_{20})$

$=\dfrac{7[2\cdot 20+(7-1)(-3)]}{2}-\dfrac{13[2\cdot(-1)+(13-1)(-3)]}{2}$

$=324$。

15. $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角形面積公式應用

解析：假設三角形面積為 A，

則 $\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{8}$ 三高所對應的底邊長分別為 $8A$、$12A$、$16A$

利用海龍公式得 $A=\sqrt{18A\cdot 10A\cdot 6A\cdot 2A}=12\sqrt{15}A^2$

$\Rightarrow A(12\sqrt{15}A-1)=0$

則 $A=0$ 或 $\dfrac{1}{12\sqrt{15}}$ (0 不合)

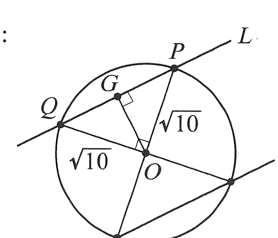
以 $\dfrac{1}{6}$ 為高的底邊為 $12A=12\times\dfrac{1}{12\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$。

16. 4

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線與圓的關係

解析：



圓心 $O(0\ ,1)$，且半徑為 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\sqrt{10}$

∵兩平行線將圓周四等分

∴圓心角 $\angle POQ=90^\circ$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{10+10}=2\sqrt{5}\Rightarrow \overline{PG}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{OG}=\sqrt{10-5}=\sqrt{5}$

且設其中一條平行線 L 為 $x-2y+k=0$

則 $d(O\ ,L)=\dfrac{|0-2+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}\Rightarrow k=-3$ 或 7

故 $m=7$，$n=-3$ 或 $m=-3$，$n=7$

得 $m+n=4$。

17. $\dfrac{9}{68}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合、機率

解析：號碼連續的可能為 123、234、345、456，共 4 種

三張卡片顏色的排法為 3^3 種

取出的三張卡片上的號碼連續的機率為 $\dfrac{4\times 3^3}{C^{18}_3}=\dfrac{9}{68}$。

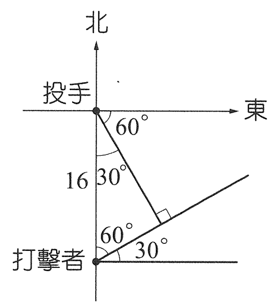
第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：平面測量

解析：依照題目可以畫出下圖



∵最短距離為垂直距離

∴可以知道要往東 60° 南

故選(3)。

19. $5\sqrt{3}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：平面測量

解析：由圖形可以知道球滾的距離為 $16\cos 60^\circ=8$ 公尺，

投手跑的距離為 $16\sin 60^\circ=8\sqrt{3}$ 公尺

球的速度為每秒 5 公尺，所以經過的時間為 $\dfrac{8}{5}$ 秒

則投手速度至少為 $\dfrac{8\sqrt{3}}{\frac{8}{5}}=5\sqrt{3}$ 公尺／秒。

◎評分原則

由圖形可以知道球滾的距離為 $16\cos 60^\circ=8$ 公尺， (1 分)
投手跑的距離為 $16\sin 60^\circ=8\sqrt{3}$ 公尺 (1 分)
球的速度為每秒 5 公尺，所以經過的時間為 $\dfrac{8}{5}$ 秒 (2 分)
則投手速度至少為 $\dfrac{8\sqrt{3}}{\frac{8}{5}}=5\sqrt{3}$ 公尺／秒。 (2 分)

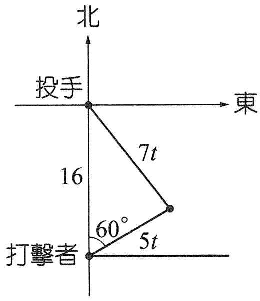
20. 2 秒

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理、平面測量

解析：假設經過 t 秒，

則球滾的距離為 $5t$ 公尺，投手跑的距離為 $7t$ 公尺，如下圖



由餘弦定理知：

$(7t)^2=(5t)^2+16^2-2\cdot 5t\cdot 16\cdot\cos 60^\circ$

$\Rightarrow 3t^2+10t-32=0$

$\Rightarrow (t-2)(3t+16)=0$

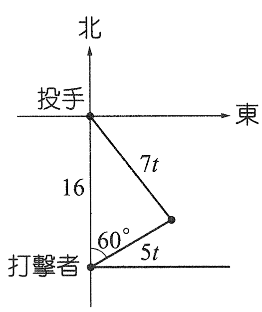
$\Rightarrow t=2$ 或 $t=\dfrac{-16}{3}$ (不合)

則需要 2 秒。

◎評分原則

假設經過 t 秒，

則球滾的距離為 $5t$ 公尺，投手跑的距離為 $7t$ 公尺，如下圖



由餘弦定理知：

$(7t)^2=(5t)^2+16^2-2\cdot 5t\cdot 16\cdot\cos 60^\circ$　(2 分)

$\Rightarrow 3t^2+10t-32=0$

$\Rightarrow (t-2)(3t+16)=0$　(2 分)

$\Rightarrow t=2$ 或 $t=\dfrac{-16}{3}$ (不合)　(1 分)

則需要 2 秒。　(1 分)