新竹區高中 113 年(112 學年度)
高三上 學測模擬考數學(數 A)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 已知三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+21x-12$ 的函數圖形有對稱中心，則下列何者為此圖形的對稱中心？
(1) $(0,-12)$ (2) $(3,-3)$ (3) $(-1,-43)$ (4) $(1,1)$ (5) $(2,2)$

答：(2)

解：$f(x)=(x-3)^3-6(x-3)-3$，對稱中心 $(3,-1)$

2. 若點 (a,b) 在函數 $y=\log_2 x$ 的圖形上，則下列敘述何者正確？
(1) $\left(a,\frac{1}{b}\right)$ 在函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形上
(2) $(a,b-1)$ 和 $(4a,b)$ 所形成的線段與 $y=\log_2 x$ 的圖形有相交
(3) (a,b) 和原點所形成的直線斜率必小於 2
(4) (a,b) 可能是第二象限的點
(5) (a,b) 可能同時在 $y=2^x$ 的圖形上

答：(3)

解：$(a,b)\in y=\log_2 x \Rightarrow b=\log_2 a$
(1)應為 $(a,-b)\in y=\log_{\frac{1}{2}} x$
(2) $b-1<\log_2 a$ 且 $b<\log_2 4a$，表 $(a,b-1)$，$(4a,b)$ 在 $y=\log_2 x$ 同側
(3) $y=x$ 與 $y=\log_2 x$ 無交點，故斜率必 <1，也必 <2
(4) a 必為正，故不合
(5) $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 無交點，故不合

3. 已知 a、b 為整數，若不等式 $\begin{cases} 3x-a\le 0 \\ 5x-b>0 \end{cases}$ 的整數解為 2、3、4、5，則 $a+b$ <u>不可能</u>為下列何者？
(1) 27 (2) 26 (3) 25 (4) 24 (5) 23

答：(1)

解：$\begin{cases} 5\le x\le \dfrac{a}{3}<6 \\ 1\le \dfrac{b}{5}<x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15\le a<18 \\ 5\le b<10 \end{cases} \Rightarrow a+b=20,21,22,23,24,25,26$

4. 玩家想要設定一組讓其他人進入遊戲空間的密碼，已知密碼設定須滿足兩個條件：
ⅰ密碼須為 3 位以上（含）的正整數；
ⅱ數字須由左而右愈來愈小。
試問設定密碼的選擇有幾種？
(1) 84 種　(2) 120 種　(3) 967 種　(4) 968 種　(5) 999 種

答：(4)

解：$C_3^{10}+C_4^{10}+C_5^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_0^{10}-C_1^{10}-C_2^{10}$
$=1024-1-10-45=968$

5. 在坐標平面上一點 C 與 $O(0,0)$ 及直線 $3x+4y=5$ 上任一點 P，恆有 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=10$，則 C 點在下列哪一條直線上？
(1) $3x+4y=10$　(2) $2x-5y=-10$　(3) $x+y=14$
(4) $2x-y=5$　(5) $4x-3y=10$

答：(3)

解：$3x+4y=5\Leftrightarrow(3,4)\cdot(x,y)=5\Leftrightarrow(6,8)\cdot(x,y)=10$
而 $(6,8)\in$(3) $x+y=14$

二、多選題

6. 令 $f(x)=\sin x-\cos x$，請選出正確的選項。
(1) $y=f(x)$ 是週期為 2π 的函數
(2)若 $0\le x\le\frac{5\pi}{6}$，則 $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$
(3)若 $0\le x\le\frac{5\pi}{6}$，則 $f(x)$ 的最小值為 $-\sqrt{2}$
(4) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=-\sqrt{2}\sin x$ 經過適當（左右、上下）平移得到
(5)鉛垂線 $x=\frac{\pi}{4}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

答：(1)(2)(4)

解：$f(x)=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right]=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
(1)週期 2π
(2)(3) $0\le x\le\frac{5\pi}{6}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{12}\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le1$
$\Rightarrow-1\le f(x)\le\sqrt{2}$
(4)向右平移 $\pi+\frac{\pi}{4}$
(5) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，不為對稱軸

7. 已知直線L_1：$3x-2y=1$，L_2：$2x+ky+1=0$，L_3：$y=mx+m-2$，
若L_1與L_2平行，則下列哪些選項正確？

(1) $k=\dfrac{-4}{3}$　　(2) L_3必過$(1,-2)$

(3)若L_1與L_3互相垂直，則$m=\dfrac{-2}{3}$　　(4) L_1與L_3必不相交

(5) L_1與L_2的距離為$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

答：(1)(3)

解：$L_1 // L_2 \Rightarrow L_2$：$2x-\dfrac{4}{3}y+1=0$ 且 $d(L_1, L_2)=\dfrac{|3+2|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

L_3：$(y+2)=m(x+1)$，表過$(-1,-2)$

若$L_1 \perp L_3 \Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$，此時$L_1$、$L_3$必相交

8. 上一屆奧運賽場上，<u>臺灣</u>選手表現優異屢屢得牌，以<u>郭婞淳</u>舉重項目而言，也讓更多人想要接觸舉重。下表為舉重協會為素人選手舉辦的比賽成績，分為抓舉重量(X)以及挺舉重量(Y)，令X的平均為μ_x，標準差為σ_x，Y的平均為μ_y，標準差為σ_y，X與Y的相關係數為r。已知$\mu_x=36$，$\sigma_x=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，以及$Y$對$X$以最小平方法所得的迴歸直線方程式為$y=\dfrac{9}{8}x+\dfrac{27}{2}$，請選出正確的選項。

抓舉X	35	35	34	37	39
挺舉Y	53	51	a	b	59

(1) $\mu_y=54$　(2) $b<54$　(3) $a>b$　(4) $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}<1$　(5) $r=0.75$

答：(1)(2)(3)(5)

解：$(\mu_x, \mu_y)\in y=\dfrac{9}{8}x+\dfrac{27}{2} \xrightarrow{\mu_x=36} \mu_y=54$

x_i	y_i	$x_i-\mu_x$	$y_i-\mu_y$	$(x_i-\mu_x)$	$(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$
35	53	-1	-1	1	1
35	51	-1	-3	1	3
34	a	-2	$a-54$	4	$-2a+108$
37	b	1	$53-a$	1	$-a+53$
39	59	3	5	9	15
		$b-54=53-a$		$\sum=16$	$\sum=-3a+180$

$m=\dfrac{9}{8}=\dfrac{-3a+180}{16} \Rightarrow a=54$，$b=53$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{5}\left[(-1)^2+(-3)^3+0^2+(-1)^2+5^2\right]}=\frac{6}{\sqrt{5}}\quad\Rightarrow\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{2}>1$$

$$m=r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\quad\Rightarrow\frac{9}{8}=r\times\frac{3}{2}\quad\Rightarrow r=\frac{3}{4}$$

9. 若 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(1)=0$， $f(-2)=f(6)=2$，則下列哪些選項正確？
(1)當 $x=2$ 時， $f(x)$ 有最大值
(2) $a-b+c>0$
(3)此函數圖形的對稱軸為 $x=2$
(4) $f(x)$ 除以 $(x+2)(x-6)$ 的餘式為 2
(5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $\frac{2}{3}$

答：(2)(3)(4)

解： $f(x)=a(x-2)^2+k\begin{cases}f(1)=a+k=0\\f(-2)=f(6)=16a+k=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{2}{15}$， $k=-\frac{2}{15}$

(1)應為最小值　(3)正確

(2) $f(x)=\frac{2}{15}(x-2)^2-\frac{2}{15}=\frac{2}{15}\left[x^2-4x+3\right]\Rightarrow a-b+c=\frac{16}{15}$

(4) $f(x)=\left(x^2-4x-12\right)\times\frac{2}{15}+2$

(5) $f(x)=\frac{2}{15}\left[\left(x^2+x-2\right)(1)+(-5x+5)\right]=\left(x^2-x-2\right)\times\frac{2}{15}+\left[\frac{-2x+2}{3}\right]$

10. 坐標平面上有一正八邊形 $ABCDEFGH$，請選出正確的選項。
(1)若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，則 P 點在 $\overline{BC}$ 邊的中點
(2)若 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AH}$，則 Q 點在正八邊形的外部
(3)若 R 為平面上的任一點，則 $\overrightarrow{AR}$ 可表示成 $x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{HE}$，其中 x 、 y 為實數
(4) $\sin\angle EAG=\sin\angle EFG$
(5) $\frac{\overline{ED}}{\sin\angle EAD}=\frac{\overline{GD}}{\sin\angle GFD}$

答：(1)(4)(5)

解：(1) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

(2) $2\left|\overrightarrow{AH}\right|<\left|\overrightarrow{BG}\right|$，故仍在內部

(3) $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{HE}$，不可為基底

(4) $\angle EAG+\angle EFG=180^\circ$，成立

(5)正弦定律

三、選填題

11.有一遊戲規則為：袋中有 1 號、2 號、3 號、……、9 號球各一個，由袋中任抽兩球，每球被抽出的機率相同。若兩球的號碼，在右方的看板上，為同行不相鄰或同列不相鄰，則可以得到兩個格子內金額的獎金；否則沒有獎金，例如：抽到 6 號、8 號則可得到$6+8$元，抽到 1 號、9 號得到 0 元，則玩此遊戲一次所得獎金的期望值為______元。(化為最簡分數)

5	**9**	**2**
8	**1**	**6**
4	**7**	**3**

答：$\frac{29}{18}$

解：$E(X)=\frac{1}{C_2^9}[7+14+7+9+16+5]=\frac{58}{36}=\frac{29}{18}$

12.曉華在一直角坐標平面上玩射擊遊戲，若她在$P(-2,4)$的位置手持雷射槍射到$Q(0,2)$後，以y軸當鏡面反射，則反射後會射中位於______的目標。

答：$(-8,-6)$

解：反射光為$x-y+2=0$，過$(-8,-6)$

13.某銀行的信用卡循環利息為年利率10%並且每年以複利計息一次，若刷卡刷了一筆款項後一直沒有繳卡費，則在不計額外產生的違約金的情況下，至少需要______年所欠繳的卡費會超過原本刷卡金額的兩倍。

答：8

解：$(1+10\%)^n>2 \Rightarrow n\log 1.1>\log 2 \Rightarrow n>\frac{0.3010}{0.0414}\fallingdotseq 7.2\ldots$

14.設一等差數列$\langle a_n \rangle$首項為 20，公差為-3，

則$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_{19}|+|a_{20}|=$______。

答：324

解：$a_n=20+(n-1)(-3)>0 \Rightarrow n<\frac{23}{3}\fallingdotseq 7\ldots \Rightarrow a_7=20+6(-3)=2$

$a_8=20+7\times(-3)=-1$，$a_{20}=20+19(-3)=-37$

所求$=(20+2)\times\frac{7}{2}+(1+37)\times\frac{13}{2}=77+247=324$

15.若一個三角形的高分別為$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{8}$，則以$\frac{1}{6}$為高的底邊長為________。

答：$\frac{\sqrt{15}}{15}$

解：$\Delta=a\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=b\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=c\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2} \Rightarrow a:b:c=2:3:4$

令$a=2t$，$b=3t$，$c=4t$ $\Rightarrow S=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{9}{2}t$

$$\Delta=\sqrt{\frac{9}{2}t\times\frac{5}{2}t\times\frac{3}{2}t\times\frac{t}{2}}=2t\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\quad\Rightarrow t=\frac{1}{3\sqrt{15}}\quad\Rightarrow b=3t=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

16.已知兩平行線 $x-2y+m=0$ 與 $x-2y+n=0$ 將圓 C ： $x^2+(y-1)^2=10$ 的圓周四等分，則 $m+n=$ ________ 。

答： 4

解： $d\left((0,1),x-2y+k=0\right)=\sqrt{5}\quad\Rightarrow\frac{|k-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\quad\Rightarrow k=7$ 或 -3

$\Rightarrow$ 兩線為 $x-2y+7=0$ 或 $x-2y-3=0$

17.紅色、藍色、黃色卡片各有 6 張，每組相同顏色的 6 張卡片分別寫有號碼 1 到 6。將這 18 張卡片裝進一個袋子裡，一次取出三張卡片，每張卡片被取出的機率相同，則取出的三張卡片上的號碼連續的機率為________。（化為最簡分數）

答： $\frac{9}{68}$

解： $\frac{4\times3^3}{C_3^{18}}=\frac{9}{68}$

第貳部分：混合題或非選擇題

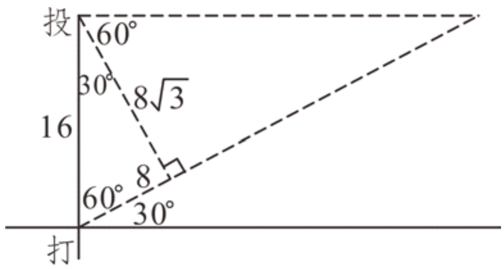
18-20 題為題組

棒球比賽時，打擊者站在投手的南方 16 公尺處，短打擊中了投手所投出的球，此球從打擊者位置保持以每秒 5 公尺的速度往東 $30°$ 北直線等速滾過去，若已知投手跑步最快的速度是每秒 x 公尺，試回答下列問題：

18.若投手想跑最短距離去接球，則他應該往何種方向跑去？（單選題）
(1)東 $60°$ 北　(2)東 $30°$ 北　(3)東 $60°$ 南　(4)東 $30°$ 南　(5)正東方

答： (3)

解：



19.承 18.題，此時 x 至少要多少才能接住球？

答： $5\sqrt{3}$

20.若投手實際跑步最快的速度是每秒 7 公尺，則此投手最快幾秒可以接到球？

答： 2

解： $\cos60°=\frac{16^2+(5t)^2-(7t)^2}{2\times16\times5t}\quad\Rightarrow t=2$ ， $-\frac{16}{3}$ (不合)