

全國公立高中 113 學年度第三次學測模擬考數學 A(南一)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



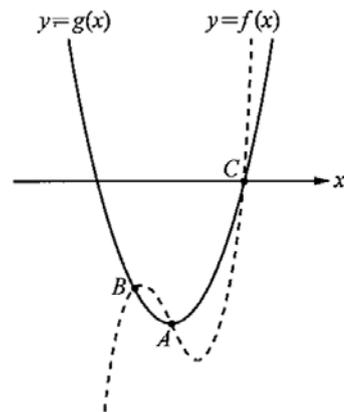
一、單選題(占 30 分)

1. 已知 a, b 為正實數，且滿足 $\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 18 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 \end{cases}$ ，試求 $a+b$ 之值。
(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8 (5) 9
2. 設集合 $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2|x - \sqrt{3}| = |x + 1|\}$ 、集合 $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 2|x - \sqrt{3}| = x + 1\}$ 、集合 $C = \{x | x \in \mathbb{R}, 2(x - \sqrt{3}) = |x + 1|\}$ 。試問下列哪一個選項正確？
(1) $A = B \neq C$ (2) $B = C \neq A$ (3) $C = A \neq B$ (4) $A = B = C$ (5) $A \neq B$ 且 $B \neq C$
3. 關於函數圖形的特性，下列敘述何者**錯誤**？ (1) $y = \sin x$ 的函數圖形是點對稱圖形
(2) $y = \cos x$ 的函數圖形是線對稱圖形 (3) $y = \sin x$ 的函數圖形經適當平移後可得到 $y = \cos x$ 的函數圖形 (4) $y = 2^x$ 和 $y = \log_2 x$ 都是嚴格遞增函數 (5) $y = 2^{-x}$ 的函數圖形經適當平移後可得到 $y = -\log_2 x$ 的圖形
4. 已知 $y = g(x) = 2\cos 2x$ 向右平移 θ 後，可和 $y = f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ 重合，其中 θ 為何？ (1) 0 (2) $\frac{\pi}{12}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$ (5) $\frac{\pi}{2}$
5. 等比數列 $\{a_n\}$ 的首項為 1，且公比為 -2 。 $\frac{1}{|a_1 - a_2|} + \frac{1}{|a_2 - a_3|} + \frac{1}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{1}{|a_{10} - a_{11}|} = \frac{b}{a}$ ，其中 a, b 為互質的正整數，則 $a - b = ?$ (1) 161 (2) 171 (3) 181 (4) 191 (5) 201
6. 已知圓 $C: x^2 + (y - 1)^2 = 10$ 和直線 $L: 2x + y = c$ 相交於相異兩點 A, B 。令 $O(0, 1)$ ，當 $\triangle OAB$ 面積有最大值時，所有可能 c 的値之乘積為何？
(1) -6 (2) -12 (3) -18 (4) -24 (5) -30

二、多選題(占 30 分)

7. 已知 $f(x), g(x)$ 皆為三次多項式， $h(x)$ 為二次多項式， $f(x)$ 和 $g(x)$ 除以 $h(x)$ 的餘式為 $r_1(x)$ 和 $r_2(x)$ ，其中 $r_1(x)$ 為一次多項式， $r_2(x)$ 為常數多項式。試選出正確的選項。
(1) $3f(x) + 2g(x)$ 必為 3 次多項式 (2) $12f(x) + 9g(x)$ 除以 $3h(x)$ 的餘式為 $4r_1(x) + 3r_2(x)$
(3) $(3x + 2)g(x)$ 除以 $h(x)$ 的餘式為 $(3x + 2)r_2(x)$ (4) $3f(x)$ 除以 $x^2h(x)$ 的餘式必為 3 次多項式 (5) $f(x)g(x)$ 除以 $h(x)$ 的餘式必為 $r_1(x)r_2(x)$
8. 某音樂公司調查公司內每位歌手某一個月內練習唱歌的小時數及該歌手下個月參加各項歌唱比賽的獲獎次數。令 x 表示練習唱歌的小時數， y 表示獲獎次數。若 y 對 x 的迴歸直線為 $y = \frac{3}{8}x + k$ ， k 為常數，分別以 $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ 表示 x 的算術平均數、 y 的算術平均數、 x 的標準差、 y 的標準差。試選出正確的選項。
(1) 若 $k > 0$ ，則 $\mu_x < \mu_y$
(2) 若 $k < 0$ ，則 $\mu_x > \mu_y$ (3) 若 $\sigma_x = 10$ ，則 σ_y 可能為 3 (4) 若 $\sigma_y = 7$ ，則 σ_x 可能為 10
(5) 若分別將 x, y 標準化得 x' 及 y' 則 y' 對 x' 的迴歸直線為 $y = \frac{3}{8}x$
9. 已知滿足方程式 $2^x \cdot 3^y = 12$ 的所有實數數對 (x, y) 在平面上形成一直線 L 。試選出正確的選項。
(1) 直線 L 通過點 $(2, 1)$ (2) 直線 L 的斜率為正實數 (3) 直線 L 的 y 截距為小於 3 的正數 (4) 直線 L 不通過第三象限 (5) 若直線 L' 與 L 垂直，則直線 L' 的斜率為 $\log_2 3$

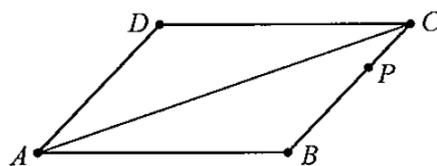
10. 已知三次函數 $y = f(x)$ 與二次函數 $y = g(x)$ 的圖形相交於 $A(3, -4), B, C$ 三點，如圖(1)，其中 A 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心，也是 $y = g(x)$ 圖形的頂點，且點 C 在 x 軸上，而兩多項式函數的領導係數皆為 1。試選出正確的選項。



圖(1)

- (1) $f(x) = (x-3)^3 - 4$
- (2) $y = f(x)$ 在 $x=3$ 附近的一次近似直線斜率為 -4
- (3) 若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，則 $r(3) = -4$
- (4) $y = f(x) - g(x)$ 的圖形通過 A, B, C 三點
- (5) 不等式 $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ 的解為 $x \geq 1$

11. 平行四邊形 $ABCD$ ，已知 P 為 \overline{BC} 上一點，且 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$ ，其中 $P \neq B$ 且 $P \neq C$ ， $\overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AR} = (a-0.1)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ})$ 。試選出正確的選項。



圖(2)

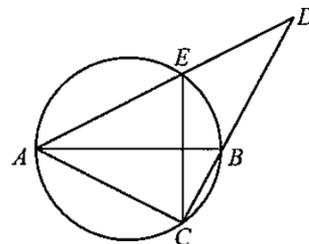
- (1) Q 必落在 \overline{CD} 上
- (2) S 必落在 \overline{AC} 上
- (3) R 必落在 $\triangle ABC$ 內部
- (4) $1 < a + b < 2$
- (5) $\triangle ACP$ 面積 = $\triangle ACQ$ 面積

12. 某班共有 36 位學生，某天他們決定用猜拳最輸者擔任當日的值日生，每次猜贏者離開，沒猜贏者繼續猜。但是他們為了要幾個人一組猜拳爭論不休。已知每個人每次出剪刀、石頭、布三種拳的機會均等，假設 P_n 為 n 個人一組猜拳一次平手的機率，其中 $n \geq 2, n \in N$ 。試選出正確的選項。
- (1) 甲生說： $P_3 = \frac{9}{27}$
 - (2) 乙生說： $P_4 = \frac{39}{81}$
 - (3) 丙生說：越多人猜拳越容易平手，換句話說，若 $a, b \in N, a > b \geq 2$ ，則 $P_a > P_b$
 - (4) 丁生說：如果每 2 人一組猜拳，猜拳一次後，沒猜贏的人數期望值為 24 人
 - (5) 戊生說：如果每 3 人一組猜拳，猜拳一次後，沒猜贏的人數期望值為 24 人

三、選填題(占 25 分)

13. 平面上有一定點 $A(2, 1)$ 及一直線 $L: y = mx$ ，令 A 在 L 的投影點為 A' ，則線段 $\overline{AA'}$ 長最大時的 m 值 = _____。

14. 如圖(3)，以 $\overline{AB} = 25$ 為直徑作一圓，並於此圓上取一點 C ，使得 $\overline{AC} = 24$ ，在射線 \overrightarrow{CB} 上取一點 D ，使得 $\overline{AD} = 40$ ，若 \overline{AD} 交圓於 E 點，試求 $\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}}$ = _____。(化為最簡分數)



圖(3)

15. 四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B = 150^\circ, \angle C = 150^\circ, \overline{AB} = 6, \overline{BC} = 4, \overline{CD} = 8$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積 _____。

16. 設 a, b 均為大於 1 的實數，且 c 為不等於 1 的正實數，若 $2(\log_a c + \log_b c) = 9 \log_{ab} c$ ，則 $\log_a b$ 的最小值 = _____。(化為最簡分數)

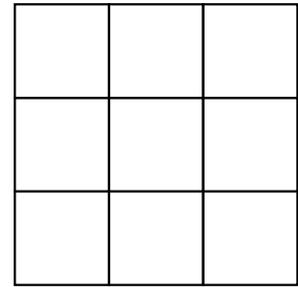
17. 已知 $a > 1$ ，且在坐標平面的第一象限有 A, B 兩點分別在 $y = a^x$ 及 $y = \log_a x$ 上，使得正三角形 OAB 的邊長為 $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ ，其中 O 為原點，則 $a =$ _____。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

圖(4)是一個由 9 個相同大小的正方形所組成的九宮格。當其中 3 個正方形的中心落在同一直線時，我們稱這 3 格形成一條連線。試回答下列問題。

18. 從這 9 格選取其中 5 格，使得這 5 格可以形成 2 條連線的方法數有幾種？(單選題，3 分)
 (1) 20 (2) 21 (3) 22
 (4) 23 (5) 24



圖(4)

19. 從這 9 格選取其中 5 格，每格被選取的機會相等，則選出的這 5 格恰可以形成 1 條連線的機率為何？(非選擇題，6 分)
20. 從這 9 格選取其中 5 格，每格被選取的機會相等，則選出的這 5 格形成的連線數之期望值為何？(非選擇題，6 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.142$ 。

指對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

RA399 全國公私立高中 113 學年度第三次學測模擬考數學 A(南一)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (1) 3. (5) 4. (2) 5. (2) 6. (4) 7. (3)(4)(5) 8. (2)(4)

9. (1)(3)(4)(5) 10. (3)(5) 11. (1)(2)(4)(5) 12. (1)(2)(4)(5)

選填題：13. -2 14. $\frac{4}{5}$ 15. $12\sqrt{3}+14$ 16. $\frac{1}{2}$ 17. $\sqrt{3}+1$

混合題：18. (3) 19. $\frac{38}{63}$ 20. $\frac{20}{21}$