數學 A 考科解析

考試日期：113 年 10 月 28~29 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
3	1	5	2	2	4	345	24	1345	35	1245	1245	—	2	4
14-2	**15-1**	**15-2**	**15-3**	**15-4**	**15-5**	**16-1**	**16-2**	**17-1**	**17-2**	**18**	**19**	**20**		
5	1	2	3	1	4	1	2	3	1	3				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【知識點】實數與指對數

【解析】令 $x=\sqrt{a}>0$，$y=\sqrt{b}>0$，

則聯立方程式可改寫為 $\begin{cases} x^3+y^3=18 \\ x+y=3 \end{cases}$，

可知 $\begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=18 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow xy=1$，

所求 $a+b=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7$，

故選(3)。

2. 【知識點】實數與指對數

【解析】<法一>

解方程式

①當 $x\geq\sqrt{3}$ 時，

解 $2(x-\sqrt{3})=x+1 \Rightarrow x=1+2\sqrt{3}\in A\cap B\cap C$。

②當 $-1\leq x<\sqrt{3}$ 時，

解 $-2(x-\sqrt{3})=x+1 \Rightarrow 3x=2\sqrt{3}-1$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}\in A\cap B$，

解 $2(x-\sqrt{3})=x+1 \Rightarrow x=2\sqrt{3}+1$ 不合，

知 $C\neq A$，$C\neq B$。

③當 $x<-1$ 時，

解 $-2(x-\sqrt{3})=-x-1 \Rightarrow x=1+2\sqrt{3}$ 不合，

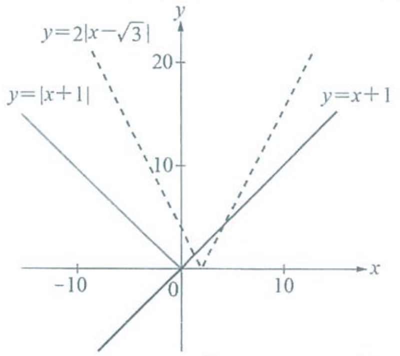
解 $2(x-\sqrt{3})=-x-1 \Rightarrow 3x=2\sqrt{3}-1 \Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}$ 不合，

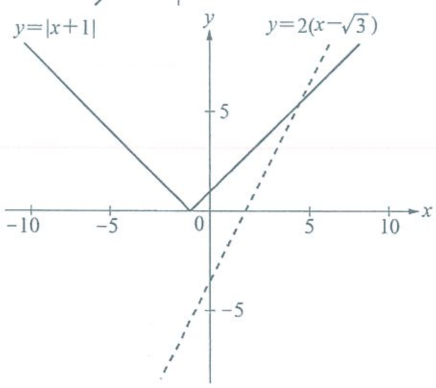
知 $A=B$。

故選(1)。

<法二>

畫函數圖形如下圖可知 $A=B\neq C$，故選(1)。





3. 【知識點】指數與對數函數、三角函數

【解析】$y=2^{-x}$ 和 $y=-\log_2 x$ 都是遞減函數，

但 $y=2^{-x}$ 有水平漸近線，$y=-\log_2 x$ 有鉛直漸近線，

$y=2^{-x}$ 平移後無法得到 $y=-\log_2 x$，

故選(5)。

4. 【知識點】三角函數

【解析】$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，

$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})=2\cos[\dfrac{\pi}{2}-(2x+\dfrac{\pi}{3})]$

$=2\cos(\dfrac{\pi}{6}-2x)=2\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})=2\cos[2(x-\dfrac{\pi}{12})]$

$y=g(x)$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 和 $y=f(x)$ 重合，

故選(2)。

5. 【知識點】數列與級數

【解析】

因為 $\dfrac{1}{|a_n-a_{n+1}|}=\dfrac{1}{|1\times(-2)^{n-1}-1\times(-2)^n|}=\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$，

所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{3}\times(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{341}{512}$，所以 $a-b=171$，

故選(2)。

6. 【知識點】直線與圓

【解析】

$\triangle OAB$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB\leq\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$，

當 $\angle AOB=90°$ 時，$\triangle OAB$ 面積有最大值，

此時，O 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$，

又 O 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $\dfrac{|0+1-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|1-c|}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{|1-c|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$，

故 c 為 6 或 -4，所以所求為 -24，

故選(4)。

二、多選題

7. 【知識點】多項式函數

【解析】

(1) ×：不一定，有可能是低於 3 次。

(2) ×：所求餘式為 $12r_1(x)+9r_2(x)$。

(3) ○：因為 $r_2(x)$ 為常數多項式，
$(3x+2)r_2(x)$ 為 1 次多項式，
其次數小於除式二次多項式 $h(x)$ 的次數。

(4) ○：3 次多項式除以 4 次多項式，
則餘式必為 3 次多項式。

(5) ○：$f(x)=h(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x)$，
$g(x)=h(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)$，
$f(x)g(x)=h(x)\cdot Q(x)+r_1(x)r_2(x)$
其中 $r_1(x)r_2(x)$ 為一次多項式。

故選(3)(4)(5)。

8. 【知識點】數據分析

【解析】

(1) ×：因為 $\mu_y=\dfrac{3}{8}\mu_x+k$，當 $\mu_x=8,k=1$ 時，$\mu_y=4$。

(2) ○：因為 $\mu_y=\dfrac{3}{8}\mu_x+k$，且 $\mu_x>0$。

當 $k<0$ 時，$\mu_y<\mu_x$。

(3) × (4) ○：設兩變數 x、y 的相關係數為 r，

由 $r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{8}$ 知 $0<r<1$，所以 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{8r}>\dfrac{3}{8}$，

故(3)錯誤、(4)正確。

(5) ×：因兩變數 x' 及 y' 的相關係數 $r'=r$、x' 及 y' 的標準差均為 1、x' 及 y' 的算術平均數均為 0，

故 y' 對 x' 的迴歸直線為 $y=rx$，又 r 未必為 $\dfrac{3}{8}$，

故(5)為錯誤。

故選(2)(4)。

9. 【知識點】指數與對數函數、直線與圓

【解析】兩邊取 log 可得 $(\log 2)x+(\log 3)y=\log 12$

$\Rightarrow y=-\dfrac{\log 2}{\log 3}x+\dfrac{\log 12}{\log 3}$。

(1) ○：點 $(2,1)$ 代入檢驗，等號成立。

(2) ×：直線 L 的斜率 $=-\dfrac{\log 2}{\log 3}$ 為負實數。

(3) ○：直線 L 的 y 截距 $=\dfrac{\log 12}{\log 3}=\log_3 12$

且 $2=\log_3 9<\log_3 12<\log_3 27=3$。

(4) ○：直線 L 的 y 截距 >0 且斜率 <0，

故知直線 L 不通過第三象限。

(5) ○：已知互相垂直的兩直線其斜率乘積為 -1，

故直線 L' 的斜率為 $\dfrac{\log 3}{\log 2}=\log_2 3$，

故選(1)(3)(4)(5)。

10. 【知識點】多項式函數

【解析】

(1) ×：$y=(x-3)^3-4$ 為一個嚴格遞增的函數，與圖形不符。

(2) ×：已知 $g(x)=(x-3)^2-4$，可得點 $C(5,0)$，

可令 $f(x)=(x-3)^3+p(x-3)-4$，

將點 $C(5,0)$ 代入 $f(x)$ 可得 $p=-2$，

所以 $f(x)=(x-3)^3-2(x-3)-4$，

可得 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 附近的一次近似直線為

$y=-2(x-3)-4$，所以直線斜率為 -2。

(3) ○：$f(x)=(x-3)^3-2(x-3)-4$ 除以

$g(x)=(x-3)^2-4$ 之餘式 $r(x)=2(x-3)-4$，

所以 $r(3)=-4$。

(4) ×：已知 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形相交於 $A(3,-4)$，

可得 $f(3)=-4$ 且 $g(3)=-4$，所以 $f(3)-g(3)=0$，

即 $y=f(x)-g(x)$ 的圖形通過 $(3,0)$，非 $A(3,-4)$，

同理，令 $B(\beta,y_1),C(\gamma,y_2)$，

則 $y=f(x)-g(x)$ 的圖形通過 $(\beta,0),(\gamma,0)$，

非 $B(\beta,y_1),C(\gamma,y_2)$。

(5) ○：$f(x)\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$ 或 $f(x)\cdot g(x)=0$，

而 $f(x)\cdot g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>0,g(x)>0$

或 $f(x)<0,g(x)<0$，

而 $f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=0$，

由圖形可知：

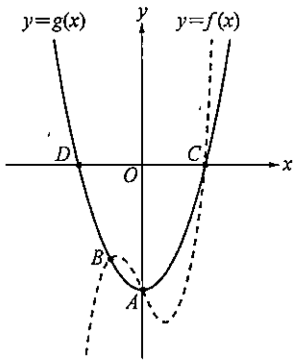
①$f(x)>0,g(x)>0 \Leftrightarrow x>5$。

②而由二次函數 $y=g(x)$ 圖形對稱直線 $x=3$，

可知 $f(x)<0,g(x)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$。

③而 $f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ 或 $x=5$。

由①、②、③可知 $f(x)\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$。



故選(3)(5)。

11. 【知識點】平面向量

【解析】

(1) ○：因為 P 為 $\overline{BC}$ 上一點，所以 $a=1$，$0<b<1$，

所以 $\overrightarrow{AQ}=b\,\overrightarrow{AB}+1\,\overrightarrow{AD}$，

所以 Q 必落在 $\overline{CD}$ 上。

(2) ○：因為 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=\dfrac{a+b}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\dfrac{a+b}{2}\overrightarrow{AC}$，其中 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a+b}{2}<1$，

故 $\overrightarrow{AS}$ 必落在 $\overline{AC}$ 上。

(3) ×：不一定，若 $b=0.9999$，R 會落在 $\triangle ACD$ 中。

(4) ○：$a=1$，$0<b<1$，所以 $1<a+b<2$。

(5) ○：$\triangle ACP$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AP}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1-b}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}\end{vmatrix}\right|$，

$\triangle ACQ$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AQ}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1-b}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}\end{vmatrix}\right|$，

所以 $\triangle ACP$ 面積 $=\triangle ACQ$ 面積。

故選(1)(2)(4)(5)。

12. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

(1) ○：$P_3=\dfrac{\overbrace{C_1^3}^{\text{三人出的拳全相同}}+\overbrace{3!}^{\text{三人出的拳全相異}}}{3^3}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$。

(2) ○：$P_4=\dfrac{\overbrace{C_1^3}^{\text{四人出的拳全相同}}+\overbrace{(C_2^4\cdot 3)\cdot 2!}^{\text{兩人出的拳相同與另兩人彼此相異}}}{3^4}$

$=\dfrac{3+36}{81}=\dfrac{39}{81}$。

(3) ×：$P_2=\dfrac{\overbrace{C_1^3}^{\text{兩人出的拳全相同}}}{3^2}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，可知 $P_2=P_3$，

事實上 $P_n=1-\dfrac{\overbrace{C_2^3(2^n-2)}^{n\text{ 人可分勝負(全部只出兩種拳)}}}{3^n}$。

(4) ○：$(\underbrace{2}_{\text{平手人數}}\times\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{平手機率}}+\underbrace{1}_{\text{輸的人數}}\times\underbrace{\tfrac{2}{3}}_{\text{分出勝負的機率}})\times\underbrace{18}_{\text{每2人一組，共18組}}$

$=12+12=24$。

(5) ○：$(\underbrace{3}_{\text{平手人數}}\times\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{平手機率}}+\underbrace{2}_{\text{輸的人數}}\times\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{1人贏，2人輸的機率}}+\underbrace{1}_{\text{輸的人數}}\times\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{2人贏，1人輸的機率}})\times\underbrace{12}_{\text{每3人一組，共12組}}$

$=12+8+4=24$。

故選(1)(2)(4)(5)。

三、選填題

13. 【知識點】直線與圓、平面向量

【解析】<法一>

已知 $L:y=mx$ 恆過原點 $O(0,0)$

且 A' 為 A 在 L 的投影點，

可得 $\angle AA'O=\dfrac{\pi}{2}$，所以 A' 恆在

以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓 C 上，

即 $\overline{AA'}$ 為圓 C 之一弦，而線段

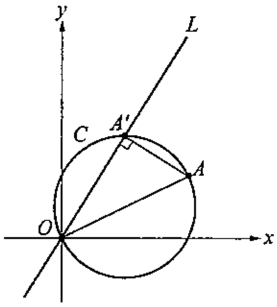
$\overline{AA'}$ 長最大時即為直徑 $\overline{OA}$，

即 A 在 L 的投影點 A' 為

原點 $O(0,0)$，此時 L 為過

原點 $O(0,0)$ 與 $\overline{OA}$ 垂直的直線，

而 L 的斜率 m 值 $=-2$。



<法二>

$L：mx-y=0$，$\overline{AA'}=d(A,L)=\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$

可得 $\overline{AA'}^2=\dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1}$，

而由柯西不等式 $(m^2+(-1)^2)\cdot(2^2+1^2)\geq(2m-1)^2$ 可得

$\dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1}\leq 2^2+(-1)^2=5\Rightarrow\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\leq\sqrt{5}$，

“=” 成立條件為 $(m,-1)//(2,1)$，即 $m=-2$，

故 $m=-2$。

14. 【知識點】三角比

【解析】

因為 $\overline{AB}=25$ 為直徑，可知 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle AEB=\dfrac{\pi}{2}$，

由於 $\overline{AC}=24$，可得 $\overline{BC}=7$，

由於 $\overline{AD}=40$，可得 $\overline{CD}=32$，$\overline{BD}=25$，

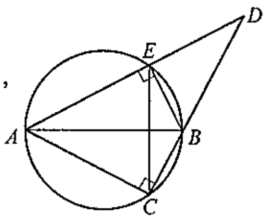
於是 $\triangle ABD$ 為等腰三角形，

所以 $\overline{AE}=\overline{DE}=20$，$\overline{BE}=15$，

由於 $\triangle ACE$ 與 $\triangle ABC$ 的外接圓相同，

可知 $\dfrac{\overline{CE}}{\sin A}=$ 外接圓直徑 $=\overline{AB}$，

所以 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AB}}=\sin A=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{32}{40}=\dfrac{4}{5}$。



15. 【知識點】三角比

【解析】

延長 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 設交於 E 點，則 $\triangle EBC$ 為等腰三角形，

$\overline{BC}=4$ 且 $\angle B$、$\angle C$ 皆為 30°，所以 $\overline{EB}=\overline{EC}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，

四邊形 $ABCD$ 的面積

$=\triangle EAD$ 面積 $-\triangle EBC$ 面積

$=\dfrac{1}{2}(6+\dfrac{4}{\sqrt{3}})(8+\dfrac{4}{\sqrt{3}})\sin 120^\circ-\dfrac{1}{2}(\dfrac{4}{\sqrt{3}})(\dfrac{4}{\sqrt{3}})\sin 120^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(48+14\dfrac{4}{\sqrt{3}})=12\sqrt{3}+14$。

16. 【知識點】指數與對數函數

【解析】$2(\dfrac{\log c}{\log a}+\dfrac{\log c}{\log b})=9\dfrac{\log c}{\log ab}$，其中 $\log c\neq 0$，

$2(\dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{\log b})=9\dfrac{1}{\log a+\log b}$，

$(\dfrac{\log a+\log b}{\log a}+\dfrac{\log a+\log b}{\log b})=\dfrac{9}{2}$，

所以 $1+\log_a b+1+\log_b a=\dfrac{9}{2}$，

所以 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，

所以 $\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{5}{2}$，

所以 $\log_a b=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\log_a b$ 最小值 $=\dfrac{1}{2}$。

17. 【知識點】指數與對數函數、三角比

【解析】因 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 且 A、B 均在第一象限，

可知 B 為 A 關於 $y=x$ 的對稱點。

又 O 在 $y=x$ 上，故 $y=x$ 平分 $\angle AOB$。

由 $\angle AOB=60^\circ$ 及 $y=x$ 的斜角為 45° 知 $\overleftrightarrow{OA}$ 的斜角為 75°。

設 $A(t,(2+\sqrt{3})t)$，其中 $t>0$，

因為 $\overline{OA}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\Rightarrow\sqrt{(8+4\sqrt{3})t^2}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\Rightarrow\sqrt{(8+2\sqrt{12})t^2}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\Rightarrow(\sqrt{6}+\sqrt{2})t=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\Rightarrow t=2$，

故 $(2,2\times(2+\sqrt{3}))$ 在 $y=a^x$

$\Rightarrow 2\times(2+\sqrt{3})=a^2\Rightarrow a^2=4+2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=\sqrt{3}+1$（因為 $a>1$）。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

情況 1：2 條連線恰為 2 條對角線，此情形有 1 種方法。

情況 2：2 條連線恰有 1 條為對角線，

先選取 1 條對角線，再選取此條對角線的某 1 格，

剩下那條連線可以是過這格的橫直線或鉛直線。

此情形有 $C_1^2\times C_1^3\times 2=12$ 種方法。

情況 3：2 條連線為 1 條橫直線及 1 條鉛直線，

先選取某 1 格，把那格的同列及同行的方格均選出，

即可形成 1 條橫直線及 1 條鉛直線，

此情形有 9 種方法。

所以共有 $1+12+9=22$ 種方法，

故選(3)。

19. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

情況 1：連線為對角線時，

先選取 1 條對角線，再從剩下 6 格挑選 2 格，

但這 2 格能再新生成橫直線或鉛直線的情況有 6 種，

能生成另 1 條對角線的情況有 1 種。

此情形有 $C_1^2\times(C_2^6-6-1)=16$ 種方法。（2 分）

情況 2：連線為橫直線或鉛直線時，

先選取一條橫直線或鉛直線，再從剩下 6 格挑選 2 格，

但這 2 格能再新生成橫直線或鉛直線的情況有 3 種，

能生成另 1 條對角線的情況有 2 種。

此情形有 $C_1^6\times(C_2^6-3-2)=60$ 種方法。（2 分）

所以所求為 $\dfrac{16+60}{C_5^9}=\dfrac{38}{63}$。（2 分）

20. 【知識點】排列組合與機率

【解析】所求為 $2\times\dfrac{22}{C_5^9}+1\times\dfrac{38}{63}+0=\dfrac{20}{21}$。（6 分）