全國公私立高級中學111學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學A考科解析

考試日期：111年12月6~7日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	13-1	13-2
3	2	4	4	5	1345	1245	134	1245	234	123	3	7	0	4
14-1	14-2	14-3	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	17-1	18	19	20			
2	4	0	4	4	2	1	2	2	4					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (Ⅰ) 若 $x>5\Rightarrow y=|x|+|x-5|=2x-5<8\Rightarrow x<\frac{13}{2}\Rightarrow x=6$。

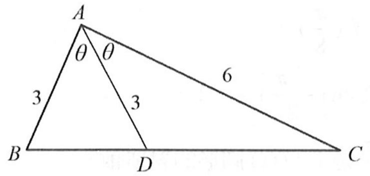
(Ⅱ) 若 $0\le x\le 5\Rightarrow y=|x|+|x-5|=x+5-x=5<8$
$\Rightarrow x=0,1,2,3,4,5$。

(Ⅲ) 若 $x<0\Rightarrow y=|x|+|x-5|=-2x+5<8\Rightarrow x>-\frac{3}{2}$
$\Rightarrow x=-1$。

合計8個整數解，
故選(3)。

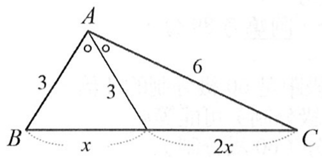
2. 令斜邊長為 T，
$T^2=(\frac{\log 8}{\log 9})^2+(\frac{\log 4}{\log 3})^2=(\log_9 8)^2+(\log_3 4)^2$
$=(\log_9 8)^2+(\log_9 16)^2=25(\log_9 2)^2$
故 $T=5\log_9 2$，則周長為
$3\log_9 2+4\log_9 2+5\log_9 2=12\log_9 2=6\log_3 2=\log_3 64$，
故選(2)。

3. <法一>
$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積，
$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 3\times 6\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 3\times 6\times\sin\theta$
$\Rightarrow 2\sin 2\theta=3\sin\theta\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{4}$
$\Rightarrow \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{1}{8}$，



故選(4)。
<法二>
如圖，$\cos B=\frac{3^2+x^2-3^2}{2\cdot 3\cdot x}=\frac{3^2+(3x)^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 3x}\Rightarrow x=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

所以 $\cos(\angle BAC)=\frac{3^2+6^2-(\frac{9}{2}\sqrt{2})^2}{2\cdot 3\cdot 6}=\frac{1}{8}$。



故選(4)。

4. <法一>
因為 B,C,P,Q 四點共線，
得 $\begin{cases}a+b=1\\2b+(7a-3b)=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，

則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=48$，

又 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+(-\frac{1}{2})\overrightarrow{AC}$，

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2 & \frac{1}{4}y_1+\frac{3}{4}y_2\\ \frac{3}{2}x_1+(-\frac{1}{2})x_2 & \frac{3}{2}y_1+(-\frac{1}{2})y_2\end{vmatrix}\right|$

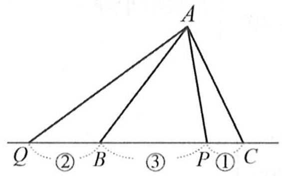
$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=48\times\frac{5}{4}=60$。

故選(4)。
<法二>
因為 B,C,P,Q 四點共線，
得 $\begin{cases}a+b=1\\2b+(7a-3b)=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

如圖，可得 $\overline{QB}:\overline{BP}:\overline{PC}=2:3:1$，



故 $\triangle PAQ=\frac{5}{4}\triangle ABC=60$，
故選(4)。

5. 三人中選一人（大華）連排

一	二	三	四	五	六	
大	大	中	小	中	小	(中,小互換)⇒2種
	大	大				2種
		大	大			4種
			大	大		2種
				大	大	2種

$\Rightarrow C_1^3\times 12=36$，
故選(5)。

二、多選題

6. (1) ○：$y=2x^2+3x-1=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{17}{8}$ 圖形可由 $y=2x^2+1$ 圖形往左平移 $\frac{3}{4}$，往下平移 $\frac{25}{8}$ 得之。

(2) ×：$y=2x^3-12x^2+1=2(x-2)^3-24(x-2)-31$
圖形在對稱中心的一次近似直線斜率與 $y=2x^3+1$ 在對稱中心的一次近似直線斜率不同，
故無法由平移得之。

(3) ○：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos 2(x-\frac{\pi}{6})$
圖形可由 $y=\cos 2x$ 圖形往右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得之。

(4) ○：$y=3(10^x-2)=10^{x+\log 3}-6$ 圖形可由 $y=10^x$ 圖形往左平移 $\log 3$，往下平移 6 得之。

(5) ○：$y=\log_2(3x-12)=\log_2 3(x-4)=\log_2(x-4)+\log_2 3$ 圖形可由 $y=\log_2 x$ 圖形往右平移 4，往上平移 $\log_2 3$ 得之。

故選(1)(3)(4)(5)。

7. (1) ○：$A=\begin{bmatrix}\sin 50° & \cos 50° \\ -\cos 50° & \sin 50°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos(-40°) & -\sin(-40°) \\ \sin(-40°) & \cos(-40°)\end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣，

故 $A^{11}-A^2=\begin{bmatrix}\cos(-440°) & -\sin(-440°) \\ \sin(-440°) & \cos(-440°)\end{bmatrix}$

$-\begin{bmatrix}\cos(-80°) & -\sin(-80°) \\ \sin(-80)° & \cos(-80°)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$A^{11}=A^2$。

(2) ○：$B=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80° \\ \sin 80° & -\cos 80°\end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣，

故 $B^2=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

即 $B^{13}-B^5=B-B=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$B^{13}=B^5$。

(3) ×：$AB=\begin{bmatrix}\cos(-40°+80°) & \sin(-40°+80°) \\ \sin(-40°+80°) & -\cos(-40°+80°)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40° \\ \sin 40° & -\cos 40°\end{bmatrix}$。

(4) ○：$AB=\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40° \\ \sin 40° & -\cos 40°\end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣，

$(AB)^2=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

(5) ○：$B=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80° \\ \sin 80° & -\cos 80°\end{bmatrix}$

為以 L：$y=\tan 40°\times x$ 為對稱軸的鏡射矩陣，
又 $(1, \tan 40°)$ 為 L：$y=\tan 40°\times x$ 上的點，
故 $(1, \tan 40°)$ 變換後還是 $(1, \tan 40°)$。

故選(1)(2)(4)(5)。

8. (1) ○：對稱中心 x 坐標 $-\dfrac{9}{3a}=-3\Rightarrow a=1$，
$f(x)=x^3+9x^2+bx-4$，
又 $f(-3)=-27+81-3b-4\Rightarrow b=10$，
所以 $(a, b)=(1, 10)$。

(2) ×：$f(x)=x^3+9x^2+10x-4$，
$f(-10000)<0$。

(3) ○：因為 $f(x)=(x+2)^3+3(x+2)^2-14(x+2)+4$，
所以 $(-2, f(-2))$ 附近，
圖形近似直線 $y=-14x-24$。

(4) ○：$f(-1.99)=(0.01)^3+3(0.01)^2-14(0.01)+4$
$\approx -0.14+4=3.86$。
（四捨五入至小數點以下第二位）

(5) ×：$g(x)=f(x)-20=[(x+3)^3-17(x+3)+20]-20$
$=(x+3)^3-17(x+3)$
$=(x+3)[(x+3)^2-17]=0$，
所以有三個相異實根 $-3, -3\pm\sqrt{17}$。

故選(1)(3)(4)。

9. (1) ○：$0.5\times 0.6\times 0.7=0.21$。

(2) ○：$1-$(3 枚都沒擊中)$=1-0.5\times 0.4\times 0.3=0.94$。

(3) ×：

A	B	C	機率
中	中	中	$0.5\times 0.6\times 0.7=0.21$
中	中	不中	$0.5\times 0.6\times 0.3=0.09$
中	不中	中	$0.5\times 0.4\times 0.7=0.14$
不中	中	中	$0.5\times 0.6\times 0.7=0.21$

$\Rightarrow$ 逐艦被擊沉的機率為 0.65。

(4) ○：$\dfrac{0.21+0.14}{0.65}=\dfrac{7}{13}$。

(5) ○：$1-$(n 枚都沒擊中)$-$(n 枚只中 1 枚)>0.9

$\Rightarrow 1-(0.5)^n-C_1^n\times(0.5)^1\times(0.5)^{n-1}>0.9$

$\Rightarrow 1-(\dfrac{1}{2})^n\times(n+1)>0.9\Rightarrow(\dfrac{1}{2})^n\times(n+1)<0.1$

$\Rightarrow$ 將 n 從 1, 2, … 一一帶入，可得 n 的最小值為 7。

故選(1)(2)(4)(5)。

10. $f(x)=2\sin 2x-2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

$=2\sin 2x-2(\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3})$

$=2\sin 2x-2(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{2}-\cos 2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{2}+\cos 2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

(1) ×：$f(-x)=2\sin(-2x+\dfrac{\pi}{3})\neq -f(x)$。

(2) ○：因為 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}\leq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\leq\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})\leq 1\Rightarrow -\sqrt{3}\leq f(x)\leq 2$。

(3) ○：$f(\dfrac{\pi}{9})=2\sin\dfrac{5\pi}{9}=2\sin\dfrac{20\pi}{36}$，

$f(\dfrac{\pi}{8})=2\sin\dfrac{7\pi}{12}=2\sin\dfrac{21\pi}{36}$，

所以 $f(\dfrac{\pi}{9})>f(\dfrac{\pi}{8})$。

(4) ○：$f(\dfrac{-5\pi}{12})=2\sin(\dfrac{-\pi}{2})=-2$，

直線 $x=\dfrac{-5\pi}{12}$ 是 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸。

(5) ×：$f(x)=2\sin 2(x+\dfrac{\pi}{6})$，

所以 $y=2\sin 2x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 可得 $y=f(x)$ 的圖形。

故選(2)(3)(4)。

11. (1) ○：級距 $=90/60=1.5$，$68/1.5=45\ldots0.5$，
故得 $45+1=46$ 級分。

(2) ○：如果阿明考 100 分，阿嬌考 89 分，
兩人都是 60 級分。

(3) ○：因為 15 級分制的級距是 60 級分制的 4 倍，
所以 10 級分（15 級分制）可能等於
37, 38, 39, 40 級分（60 級分制），
故中位數 40 級分（60 級分制）回推可得
10 級分（15 級分制）。

(4) ×：除了 0 級分之外，每個 15 級分制的級分都可能換算到 60 級分制的 4 個級分，沒有原始分數並不能確定會換算成那一個級分，所以無法確定全班級分平均數是 34.5 級分。

(5) ×：假設阿明班上 15 級分制只有 1, 2, 3 級分三種分數，且換成 60 級分制為 4, 5, 9 級分，如此可算出
$S_2<4S_1$。

故選(1)(2)(3)。

三、選填題

12. ＜法一＞

由 $y'=-0.9x'$ 可知相關係數 $r=r'=m'=-0.9$，

又 y 對 x 的迴歸線通過 $(51,\mu_y)$ 和 $(27,49)$，

由斜率 $m=\dfrac{49-\mu_y}{27-51}=-0.9\cdot\dfrac{10}{18}$，解得 $\mu_y=37$。

＜法二＞

因為標準化，將 $x'=\dfrac{x-51}{18}$，$y'=\dfrac{y-\mu_y}{10}$ 代入 $y'=-0.9x'$

$\Rightarrow \dfrac{y-\mu_y}{10}=-\dfrac{9}{10}\left(\dfrac{x-51}{18}\right)$，

$\Rightarrow$ 得 y 對 x 的迴歸線為 $y-\mu_y=-\dfrac{1}{2}(x-51)$，

將 $(27,49)$ 代入迴歸線可求出 $\mu_y=37$。

13. 設圓心 M，則直線 AM：$y-3=-\dfrac{1}{2}(x-2)\Rightarrow x+2y-8=0$。

設 $M(8-2t,t)$，因為 $\overline{AM}^2=\overline{BM}^2=r^2$，

所以 $(8-2t-2)^2+(t-3)^2=(8-2t+2)^2+(t-5)^2$

$\Rightarrow 5t^2-30t+45=5t^2-50t+125\Rightarrow t=4\Rightarrow M(0,4)$。

14. 設圖 n 共需 a_n 根不鏽鋼條，則

$$\begin{aligned}
a_1&=\quad\ \ 2\times6\\
a_2&=a_1+\ 5\times6\\
a_3&=a_2+\ 8\times6\\
a_4&=a_3+11\times6\\
+)\ \ a_5&=a_4+14\times6\\ \hline
\end{aligned}$$

所以 $a_5=2\times6+5\times6+8\times6+11\times6+14\times6=240$。

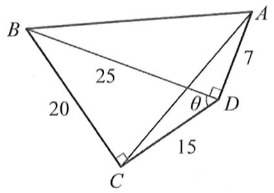
15. 由圖知 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

則 $\cos(\angle ADC)=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$，

由餘弦定理知，

$\overline{AC}^2=15^2+7^2-2\times15\times7\times\cos(\angle ADC)=442$，

所以 $\overline{AC}=\sqrt{442}$。



16. 已知 $2\times\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\2&2&1\end{vmatrix}=72$，

代表由 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 形成的平行六面體體積為 72，

即 $|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}|=72$，故當 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ 為底面積時，

對應到的最大高為 $|\overrightarrow{OC}|=3$，

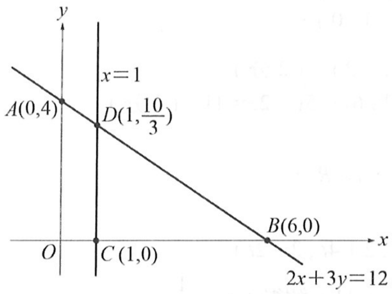
則 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ 有底面積最小值 24，

故 $\triangle OAB$ 面積的最小值為 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=12$。

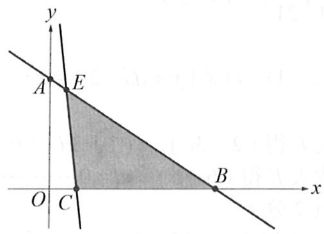
17. 如圖，$mx-y=m\Rightarrow y=mx-m=m(x-1)$，直線必過 $(1,0)$。

若 m 不存在（即 $x=1$ 時），

下圖 $\triangle BCD$ 面積為 $\dfrac{25}{3}$，梯形 $OCDA$ 面積為 $\dfrac{11}{3}$。

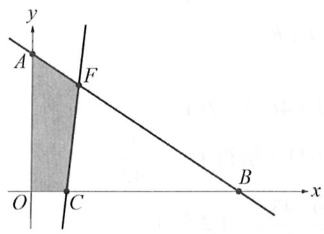


（Ⅰ）若 $m<0$，塗色區域面積 $>\dfrac{25}{3}>\dfrac{23}{4}$，不合題意。



（Ⅱ）$m=0$，不符題意。

（Ⅲ）若 $m>0$，塗色區域面積 $>\dfrac{11}{3}$，符合題意。



解 $\begin{cases}2x+3y=12\\y=m(x-1)\end{cases}$，得到交點 F 的 y 坐標為 $\dfrac{10m}{3m+2}$，

$\triangle BCF$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times6\times4-\dfrac{23}{4}=\dfrac{25}{4}=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{10m}{3m+2}$

$\Rightarrow m=2$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 平面 E_1：$2x-y+cz=1$ 與直線 L_1：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{-2}$

不相交，即 E_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 與直線 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{l_1}$ 垂直，

故 $(2,-1,c)\cdot(3,4,-2)=0$，則 $c=1$。

故選(4)。

19. 因為平面 E_1 與平面 E_2 互相垂直，

故 $(2,-1,c)\cdot(1,1,d)=0\Rightarrow cd=-1$，（3 分）

又 $A(0,1,2)$ 與 $B(-2,-7,2)$ 兩點與平面 E_2 等距離

且此兩點在平面 E_2 的異側，

即 $\overline{AB}$ 中點 $M(-1,-3,2)$ 落在平面 E_2 上，

$M(-1,-3,2)$ 代入 E_2：$x+y+dz=2$ 得 $d=3$ 且 $c=\dfrac{-1}{3}$，

故 $(c,d)=(\dfrac{-1}{3},3)$。（3 分）

20. <法一>

直線 L：$\begin{cases}2x-y+cz=1\\x+y+dz=2\end{cases}$ 在平面 E 上，

故直線 L 的任一點皆在平面 E 上，

又直線 L 必過 $R(1,1,0)$，

則 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(6,5,-2)$，(2分)

故平面 E 的方程式為 $6x+5y-2z=11$。(2分)

又 L_1：$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=2-2t\end{cases}$，$t\in R$，

L_1 上一點 $C(1+3t,2+4t,2-2t)$

代入 E：$6x+5y-2z=11$，解得 $t=-\dfrac{1}{42}$，

故交點坐標為 $(\dfrac{13}{14},\dfrac{40}{21},\dfrac{43}{21})$。(2分)

<法二>

令平面 E：$(2x-y+cz-1)+t(x+y+dz-2)=0$，

因為 $P,Q\in E$，

所以 $P(2,1,3)$ 代入 E 得 $(2+3c)+t(1+3d)=0$……①，

$Q(3,-1,1)$ 代入 E 得 $(6+c)+td=0$……………②，

①$-3\times$②$\Rightarrow t=16$，(2分)

所以 E：$18x+15y+(c+16d)z-33=0$，

又由②可知 $6+c+16d=0\Rightarrow c+16d=-6$，

故 E：$6x+5y-2z=11$。(2分)

又 L_1：$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=2-2t\end{cases}$，$t\in R$，

L_1 上一點 $C(1+3t,2+4t,2-2t)$

代入 E：$6x+5y-2z=11$，解得 $t=-\dfrac{1}{42}$，

故交點坐標為 $(\dfrac{13}{14},\dfrac{40}{21},\dfrac{43}{21})$。(2分)