全國高中 112 年(111 學年度)

高三上 第四次學測模擬考數學(數 A)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（占 85 分）

一、單選題（占 25 分）

1. 若 x 為實數，且 $|x|+|x-5|<8$，則 x 的整數解有多少個？
(1) 6　(2) 7　(3) 8　(4) 9　(5) 10

答：(3)

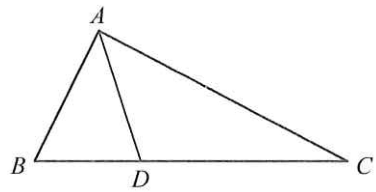
解：$|x-0|+|x-5|<8 \Rightarrow -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{13}{2} \xrightarrow{x\in Z} x=-1,0,1,\cdots,6$

2. 已知一直角三角形的兩股長分別為 $\dfrac{\log 8}{\log 9}$ 與 $\dfrac{\log 4}{\log 3}$，若此直角三角形的周長為 $\log_3 x$，則 x 之值為下列何者？
(1) 32　(2) 64　(3) 256　(4) 1024　(5) 4096

答：(2)

解：兩股長 $=3\log_9 2$，$4\log_9 2$，斜邊 $=5\log_9 2$
周長 $=12\log_9 2=6\log_3 2=\log_3 64$

3. 如右圖，在 ΔABC 中，若 $\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，且 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$、$\overline{AD}=3$，則 $\cos(\angle BAC)$ 的值為何？



(1) $\dfrac{3}{5}$　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) $\dfrac{4}{5}$
(4) $\dfrac{1}{8}$　(5) $\dfrac{7}{8}$

答：(4)

解：$\Delta ABC=\Delta ABD+\Delta ACD$，$\angle BAD=\angle CAD=\theta$

$$\frac{1}{2}\times 3\times 6\times \sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times \sin\theta+\frac{1}{2}\times 6\times 3\times \sin\theta$$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\cos\angle BAC=\cos 2\theta=2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}$

4. 已知 A、B、C 三點不共線，P、Q 為直線 BC 上相異兩點，且 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=2b\overrightarrow{AB}+(7a-3b)\overrightarrow{AC}$，其中 a、b 為相異實數。若 ΔABC 面積為 48，則 ΔAPQ 面積為多少？
(1) 24　(2) 36　(3) 48　(4) 60　(5) 72

答：(4)

解：由共線定理$\Rightarrow a+b=1$且$2b+(7a-3b)=1$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{4}，b=\frac{3}{4}，\begin{cases}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

$$\Delta APQ=\frac{5}{4}\Delta ABC=\frac{5}{4}\times 48=60$$

5. 大華、中明、小強三人要輪流在週一到週六的晚上留在公司值班，一天一人，每人排兩天，若恰有一人要連排2個晚上，且其他兩人皆不可連排，則總共有多少種排法？
(1)10 (2)12 (3)24 (4)30 (5)36

答：(5)

解：$C_1^3\times(2+2+4+2+2)=3\times 12=36$

二、多選題（占 30 分）

6. 下列哪些選項中的兩個圖形經過左右或上下平移後可完全重合？
(1) $y=2x^2+1$的圖形與$y=2x^2+3x-1$的圖形
(2) $y=2x^3+1$的圖形與$y=2x^3-12x^2+1$的圖形
(3) $y=\cos 2x$的圖形與$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$的圖形
(4) $y=10^x$的圖形與$y=3\left(10^x-2\right)$的圖形
(5) $y=\log_2 x$的圖形與$y=\log_2(3x-12)$的圖形

答：(1)(3)(4)(5)

解：(1) $y=2(x-0)^2+1$與$y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$為平移關係

(2) $y=2x^3+1$與$y=2(x-2)^3-24(x-2)-31$非平移關係

(3) $y=\cos 2x$與$y=\cos(2x-60^\circ)$為平移關係

(4) $y=10^x$與$y=10^{\log 3}\left[10^x-2\right]=10^{x+\log 3}-2\times 10^{\log 3}$為平移關係

(5) $y=\log_2 x$與$y=\log_2 3(x-4)=\log_2(x-4)+\log_2 3$為平移關係

7. $A=\begin{bmatrix}\sin 50° & \cos 50° \\ -\cos 50° & \sin 50°\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80° \\ \sin 80° & -\cos 80°\end{bmatrix}$為兩個二階方陣，

試選出正確的選項。

(1) $A^{11}=A^{2}$　(2) $B^{13}=B^{5}$　(3) $AB=\begin{bmatrix}\cos 40° & -\sin 40° \\ \sin 40° & \cos 40°\end{bmatrix}$

(4) $(AB)^2=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(5) $B\begin{bmatrix}1 \\ \tan 40°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ \tan 40°\end{bmatrix}$

答：(1)(2)(4)(5)

解：(1) $A=\begin{bmatrix}\cos(-40°) & -\sin(-40°) \\ \sin(-40°) & \cos(-40°)\end{bmatrix}$為旋轉矩陣，$A^{11}=A^{2}$

(2) $B=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80° \\ \sin 80° & -\cos 80°\end{bmatrix}$為鏡射矩陣 $\Rightarrow B^{13}=B^{5}=B$

(3) $AB=\begin{bmatrix}\sin 130° & -\cos 130° \\ -\cos 130° & -\sin 130°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40° \\ \sin 40° & -\cos 40°\end{bmatrix}$

(4) AB 為鏡射矩陣 $\Rightarrow (AB)^2=I$

(5) B 為以 $y=(\tan 40°)x$ 為鏡射軸，而點 $(1,\tan 40°)$ 恰在此鏡射軸上，故正確

8. 已知 $f(x)=ax^3+9x^2+bx-4$ 圖形的對稱中心為 $(-3,20)$，試選出正確的選項。

(1) $(a,b)=(1,10)$

(2) $f(-10000)>0$

(3) $y=f(x)$ 的圖形在點 $(-2,f(-2))$ 附近，會近似於一直線 $y=-14x-24$

(4) $f(-1.99)\approx 3.86$（四捨五入至小數點以下第二位）

(5)若 $g(x)=f(x)-20$，則 $g(x)=0$ 只有一個實根

答：(1)(3)(4)

解：$f(x)=a(x+3)^3+p(x+3)+20=ax^3+9x^2+bx-4$

$\Rightarrow a=1$，$p=-17$，$b=10$，$f(-10000)<0$

$f(x)=(x+2)^3+3(x+2)^2-14(x+2)+4$

在 $x=-2$ 處一次近似：$y=-14(x+2)+4=-14x-24$

$f(-1.99)=(0.01)^3+3(0.01)^2-14(0.01)+4\fallingdotseq 3.86$

$g(x)=f(x)-20=(x+3)^2-17(x+3)$，與 x 軸交於三點

9. U國在其南部邊境小島上部署A型、B型、C型三種反艦飛彈，其命中率分別為0.5、0.6、0.7，且飛彈不會互相干擾。R國來犯的每一艘驅逐艦，如果被2枚或2枚以上的飛彈擊中必會沉沒。請問下列敘述何者正確？
(1)針對R國某艘驅逐艦同時發射三型飛彈各1枚，則3枚飛彈都擊中的機率為0.21
(2)針對R國某艘驅逐艦同時發射三型飛彈各1枚，則此驅逐艦被擊中（不一定要沉沒）的機率為0.94
(3)針對R國某艘驅逐艦同時發射三型飛彈各1枚，則此驅逐艦被擊沉的機率為0.44
(4)針對R國某艘驅逐艦同時發射三型飛彈各1枚，已知此驅逐艦被擊沉的條件下，則它被A型與C型飛彈擊中的機率為$\frac{7}{13}$
(5)針對R國某艘驅逐艦以A型飛彈連續攻擊n發，可以使擊沉此驅逐艦的機率提高到90%以上，則n的最小值為7

答：(1)(2)(4)(5)

解：(1) $0.5\times0.6\times0.7=0.210$

(2) $1-(1-0.5)(1-0.6)(1-0.7)=1-0.5\times0.4\times0.3=1-0.060=0.940$

(3) $0.5\times0.6\times(1-0.7)+0.5\times(1-0.6)\times0.7+(1-0.5)\times0.6\times0.7+0.5\times0.6\times0.7=0.650$

(4) $\dfrac{0.5\times(1-0.6)\times0.7+0.5\times0.6\times0.7}{0.650}=\dfrac{7}{13}$

(5) $1-(1-0.5)^n-C_1^n(1-0.5)^{n-1}(0.5)>0.9 \Rightarrow (0.5)^n(1+n)<0.1$

又$(0.5)^6(1+6)=\dfrac{7}{64}\fallingdotseq 0.109\cdots$，$(0.5)^7(1+7)=\dfrac{1}{32}=0.03125$

故n取7

10. 已知函數$f(x)=2\sin 2x-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，且$x$為任意實數，下列敘述何者正確？

(1) $f(-x)=-f(x)$

(2)若$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，則$-\sqrt{3}\le f(x)\le 2$

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

(4)直線$x=\dfrac{-5\pi}{12}$是$y=f(x)$圖形的對稱軸

(5) $y=f(x)$的圖形可由$y=2\sin 2x$向左平移$\dfrac{\pi}{3}$而得

答：(2)(3)(4)

解：
$$f(x)=2\sin 2x-2\left(\sin 2x\cdot\frac{1}{2}-\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left[\frac{1}{2}\cdot\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 2x\right]$$
$$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{4\pi}{3}\Rightarrow\sin\dfrac{4\pi}{3}\le f(x)\le\sin\dfrac{\pi}{2}$

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=2\sin\dfrac{5\pi}{9}>f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\sin\dfrac{7\pi}{12}$

(4) $f\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$確為對稱軸

(5) $f(x)=2\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，表由 $y=2\sin 2x$ 向左 $\dfrac{\pi}{6}$

11. 學測15級分制的計算方式為：前1% 學生平均原始得分除以15，作為各該科之級距。
考生原始得分 0 分得 0 級分，高於 0 分但低於或等於1個級距是1級分，高於1個級距但低於或等於2個級距是2級分，以此類推到14級分；原始得分高於14個級距，則為滿級分15級分。
學測60級分制的計算方式為：前1% 學生平均原始得分除以60，作為各該科之級距。
考生原始得分 0 分得 0 級分，高於 0 分但低於或等於1個級距是1級分，高於1個級距但低於或等於2個級距是2級分，以此類推到59級分；原始得分高於59個級距，則為滿級分60級分。
舉例來說明15級分制，假設該科分數最高之前1% 學生平均原始得分為96分，則級距為 $\dfrac{96}{15}=6.40$。考生如果考0分，為0級分；考生高於0分，但低於或等於6.4分（1個級距），則為1級分；考生高於6.4分，但低於或等於12.8分（2個級距），則為2級分，依此類推到14級分。原始得分高於14個級距（$14\times 6.4=89.6$），則為滿級分15級分。
阿明與阿嬌班上有35位學生參加學測，下列針對學測英文成績的敘述，請判斷何者正確。
(1)假設全國最高前1% 平均原始得分為90分，阿明考68分，則以60級分制計算可得46級分
(2)假設全國最高前1% 平均原始得分為90分，且原始得分阿明比阿嬌多11分，則以60級分制計算阿明與阿嬌可能同級分
(3)假設以60級分制計算，阿明全班級分之中位數為40級分，則以15級分制計算，全班級分之中位數為10級分
(4)假設以15級分制計算，阿明全班級分之平均數為8.5級分，則以60級分制計算，全班級分之平均數為34.5級分
(5)假設以15級分制計算，阿明全班級分之標準差為 S_1 級分，則以60級分制計算，全班級分之標準差為 S_2 級分，則 $S_2\ge 4S_1$

答：(1)(2)(3)

解：(1) ○：級距 $=\dfrac{90}{60}=1.5$，$\dfrac{68}{1.5}=45\cdots 0.5$
故得 $45+1=46$ 級分
(2) ○：如果阿明考100分，阿嬌考89分，兩人都是60級分
(3) ○：因為15級分制的級距是60級分制的4倍，
所以10級分（15級分制）可能等於37, 38, 39, 40級分（60級分制），
故中位數40級分（60級分制）回推可得10級分（15級分制）
(4) ×：除了0級分之外，每個15級分制的級分都可能換算到60級分制的4個級分，
沒有原始分數並不能確定會換算成哪一個級分，
所以無法確定全班級分平均數是34.5級分
(5) ×：假設阿明班上15級分制只有1, 2, 3級分三種分數，
且換成60級分制為4, 5, 9級分，如此可算出 $S_2<4S_1$

故選(1)(2)(3)

三、選填題（占 30 分）

12.設兩變量 x 與 y 的 n 筆數據為 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n)，且 x 與 y 的平均數分別為 $\mu_x = 51$ 與 μ_y，標準差分別為 $\sigma_x = 18$、$\sigma_y = 10$。已知變量 $x = 27$ 時，可由 y 對 x 的迴歸線預測 y 值為 49。若將 n 筆數據 (x_i, y_i) 標準化為新數據 (x_i', y_i')，$i = 1, 2, 3, \cdots, n$，可得 y' 對 x' 的迴歸線為 $y' = -0.9x'$，求 $\mu_y =$ ________。

答：37

解：$(y - \mu_y) = (-0.9) \times \dfrac{10}{18}(x - 51) \xrightarrow{x = 27,\ y = 49} \mu_y = 37$

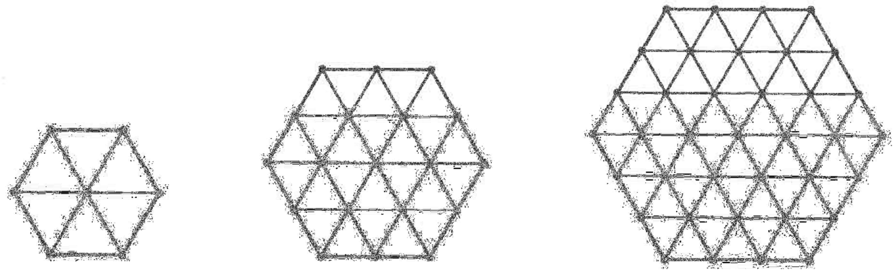
13.坐標平面上，已知直線 L：$y = 2x - 1$ 與圓 C 相切於點 $A(2, 3)$，且 $B(-2, 5)$ 在圓 C 上，則圓心坐標為________。

答：$(0, 4)$

解：$\overline{AB}$ 中點 $M(0, 4)$，$\overrightarrow{AB} = (-4, 2) // (2, -1)$，$\overrightarrow{OM} = (1, 2)$，

圓心 $(0 + t, 4 + 2t) \in$ 法線 $x + 2y = 8 \quad \Rightarrow t = 0$

14.用單位長的不鏽鋼條焊接如下圖的正六邊形，圖中的小黑點「●」為焊接點，



圖(1)　圖(2)　圖(3)

在圖(1)中，用了 12 根不鏽鋼條， 7 個焊接點；
在圖(2)中，用了 42 根不鏽鋼條，19 個焊接點；
在圖(3)中，用了 90 根不鏽鋼條， 37 個焊接點。
試問依此規則，圖(5)共需________根不鏽鋼條。

答：240

解：

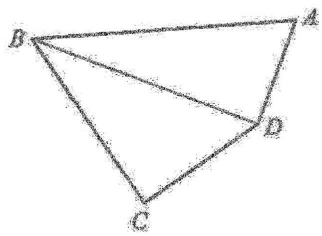
$$
\begin{aligned}
a_1 &= 12 \\
a_2 &= a_1 + 2\times1\times6 + (6) + 6\times2 \\
a_3 &= a_2 + 2\times2\times6 + (6) + 6\times3 \\
&\cdots\cdots \\
a_n &= a_{n-1} + 2\times(n-1)\times6 + (6) + 6\times n
\end{aligned}
$$

相加：$a_n = 12 + 2\times\dfrac{n(n-1)}{2}\times6 + 6(n-1) + 6\times\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$

$= 12 + 6n^2 - 6n + 6n - 6 + 3n^2 + 3n - 6 = 9n^2 + 3n$

$\therefore a_5 = 9\times25 + 3\times5 = 240$

15.如圖，四邊形$ABCD$中，$\angle BCD=\angle BDA=90°$，$\overline{DA}=7$、$\overline{DB}=25$、$\overline{DC}=15$，則$\overline{AC}=$________。



答：$\sqrt{442}$

解：$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos\angle ADC}$

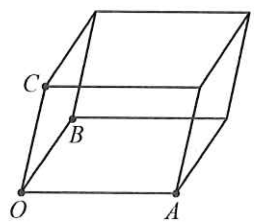
$=\sqrt{7^2+15^2-2\times7\times15\times\cos\left(90°+\angle BDC\right)}$

$=\sqrt{274+210\sin\angle BDC}=\sqrt{274+210\times\frac{4}{5}}=\sqrt{442}$

16.如圖，空間坐標中一平行六面體，某一底面的其中三個頂點為$O\left(0,0,0\right)$、$A\left(a_1,a_2,a_3\right)$、$B\left(b_1,b_2,b_3\right)$，另一面之一頂點為$C\left(2,2,1\right)$，已知

$2\times\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=72$，

則ΔOAB面積的最小值為________。



答：12

解：已知平行六面體體積72

當$|\vec{c}|=3$為高的最大值

對應平行四邊形的最小值$=24\ \Rightarrow\Delta OAB=12$

17.若m為實數，且滿足聯立不等式$\begin{cases}2x+3y\le 12\\ mx-y\le m\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$的所有點所形成區域面積為$\frac{23}{4}$平方單位。

則$m=$________。

答：2

解：$\overleftrightarrow{AB}$：$2x+3y=12\ \Rightarrow A\left(0,4\right)$，$B\left(6,0\right)$，$\Delta OAB$面積$=12$

$\overleftrightarrow{CF}$：$mx-y=m\ \Rightarrow y=m\left(x-1\right)$，過$C\left(1,0\right)$

$\overleftrightarrow{CF}$左側（灰色部分）面積$=\frac{23}{4}\ \Rightarrow\Delta BCF$面積$=\frac{25}{4}$

$\xrightarrow{\overline{BC}=5}h=\frac{5}{2}$，即$F\left(t,\frac{5}{2}\right)\in 2x+3y=12\ \Rightarrow t=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow F\left(\frac{9}{4},\frac{5}{2}\right)$，故斜率$m_{CF}=2$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

第 18 至 20 題為題組

已知空間中有兩個平面E_1：$2x-y+cz=1$，E_2：$x+y+dz=2$與一直線

L_1：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{-2}$，試回答下列問題：

18.若平面E_1：$2x-y+cz=1$與直線L_1：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{-2}$不相交，

則c之值可能為何？（單選題）

(1) -2　(2) -1　(3) 0　(4) 1　(5) 2

答：(4)

解：方向向量$\overrightarrow{L_1}=(3,4,-2)$與法向量$\overrightarrow{E_1}=(2,-1,c)$垂直

$\Rightarrow \overrightarrow{L_1}\cdot\overrightarrow{E_1}=6-4-2c=0 \Rightarrow c=1$

19.若平面E_1與平面E_2互相垂直，$A(0,1,2)$與$B(-2,-7,2)$兩點與平面E_2等距離且此兩點在平面E_2的異側，試求$(c,d)=$？

答：$(c,d)=\left(\dfrac{-1}{3},3\right)$

解：法向量$\overrightarrow{E_1}=(2,-1,c)$與$\overrightarrow{E_2}=(1,1,d)$互相垂直

$\Rightarrow \overrightarrow{E_1}\cdot\overrightarrow{E_2}=2-1+cd=0 \Rightarrow cd=-1$

A、B在平面E_2異側$(0+1+2d-2)=-(-2-7+2d-2)$

$\Rightarrow d=3$，則$c=-\dfrac{1}{3}$

20.已知直線L為平面E_1與平面E_2的交線，若$P(2,1,3)$、$Q(3,-1,1)$兩點與直線L皆落在平面E上，則平面E與直線L_1的交點為何？

答：$\left(\dfrac{13}{14},\dfrac{40}{21},\dfrac{43}{21}\right)$

解：$R(1,1,0)\in E_1, E_2$，$\overrightarrow{PQ}=(1,-2,-2)$，$\overrightarrow{PR}=(1,0,3)$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\,//\,(6,5,-2)$，故$E$：$6x+5y-2z=11$

L_1上動點$(1+3t,2+4t,2-2t)\in E \Rightarrow t=-\dfrac{1}{42}$

交點為$\left(1-\dfrac{1}{14},2-\dfrac{2}{21},2+\dfrac{1}{21}\right)=\left(\dfrac{13}{14},\dfrac{40}{21},\dfrac{43}{21}\right)$