數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(2)	(2)	(4)	(2)	(4)	(1)(2)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(2)(4)	(1)(2)(3)	(1)(3)(5)	(1)(2)(4)	(1)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：有理數的定義，基本對數律

解析：令正整數 $n=3^k$，其中 k 為整數，

使 $\log_{27} n=\dfrac{\log n}{\log 27}=\dfrac{\log 3^k}{\log 3^3}=\dfrac{k\log 3}{3\log 3}=\dfrac{k}{3}$

又 $0<n<8000 \Rightarrow 0<3^k<8000$，

因 $3^8=6561$ 且 $3^9=19683$，

因此整數 k 可為 0，1，2，……，8，共 9 個可能

故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：利用基本比例做出三角比，或使用差角公式

解析：$\tan\angle BAC=\dfrac{5}{3}$，$\tan\angle DAC=1$，

則 $\tan\angle BAD=\tan(\angle BAC-\angle DAC)$

$$=\frac{\tan\angle BAC-\tan\angle DAC}{1+\tan\angle BAC\times\tan\angle DAC}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}-1}{1+\frac{5}{3}\times 1}=\frac{1}{4}$$

故選(2)。

3. (2)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式、直線與直線的關係、直線與圓的關係，點到直線距離公式

解析：內切圓圓心到三線等距

則 $\dfrac{|(-1)+2\times 2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2\times(-1)+2+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\dfrac{|k\times(-1)+2+k-4|}{\sqrt{k^2+1^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1^2}}$

解 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$ 得 $k=-2$ 或 2

解 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1^2}}$ 亦得 $k=-2$ 或 2

但 $k=2$ 時 $L_2 // L_3$ 不能圍成三角形，只能 $k=-2$

故選(2)。

4. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數律，一維數據分析

解析：平均成長率為 $\sqrt[4]{1.2\times 1\times 1.25\times 2}-1=3^{\frac{1}{4}}-1$，

又 $\log 3^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}\log 3\approx\dfrac{1}{4}\times 0.4771=0.119275$，

四捨五入後得 $\log 3^{\frac{1}{4}}\approx 0.12$，

因此 $3^{\frac{1}{4}}\approx 10^{0.12}\approx 1.318$，

由已知條件得平均成長率最接近 $1.318-1=31.8\,\%$

故選(4)。

〈另解〉

平均成長率為 $\sqrt[4]{1.2\times 1\times 1.25\times 2}-1=3^{\frac{1}{4}}-1$，

$\sqrt{3}\approx 1.732$，

且 $(1.31)^2=1.7161<\sqrt{3}<1.7424=(1.32)^2$，

則 $1.31<3^{\frac{1}{4}}<1.32$，

由已知條件得平均成長率最接近 $1.32-1=32\,\%$

故選(4)。

5. (2)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：計算歪斜線的距離

解析：令 $L_2:\begin{cases}x=6-s\\ y=0\\ z=s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，

取兩線的方向向量

$\overrightarrow{d_1}=(-1,1,0)$ 與 $\overrightarrow{d_2}=(-1,0,1)$，

計算 $\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(1,1,1)$，

可假設平面 $E:x+y+z+k=0$ 包含 L_1 且平行 L_2，

代入 L_1 上一點 $(3,0,0)$ 得 $E:x+y+z-3=0$，

再取 L_2 上一點 $P(6,0,0)$，

所求 $d(L_1,L_2)=d(E,L_2)=d(E,P)$

$$=\frac{|6-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

故選(2)。

6. (4)

出處：第三冊〈三角函數〉、第四冊〈矩陣〉

目標：二倍角公式的應用，矩陣之乘法反矩陣存在之條件判斷

解析：依題意知 A^{-1} 不存在 $\Leftrightarrow \det A=0$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}2\sin x & 4\sin^3 x\\ \cos x & 2\cos^3 x\end{vmatrix}=4\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos x=0$

$\Rightarrow 4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=2(\sin 2x)(\cos 2x)$

$=\sin 4x=0$

$\Rightarrow 4x=0$，π，2π，3π，4π，5π，6π，7π

$\Rightarrow x=0$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{4\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{6\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4}$

滿足題意之所有 x 值總和為

$0+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{6\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{4}=7\pi$

故選(4)。

二、多選題

7. (1)(2)(5)

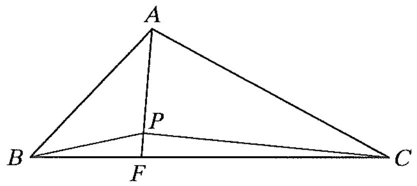
出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的分點公式與線性組合概念

解析：$\overrightarrow{AF}=t\,\overrightarrow{AP}=\dfrac{9t}{16}\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{4}\,\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BC}}\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}\,\overrightarrow{AC}$

可知$\dfrac{9t}{16}+\dfrac{t}{4}=1\Rightarrow t=\dfrac{16}{13}$



(1)○：$\overrightarrow{AF}=\dfrac{16}{13}\,\overrightarrow{AP}$，則點 P 在$\triangle ABC$內部

(2)○：$t=\dfrac{16}{13}$

(3)╳：$\overrightarrow{AF}=\dfrac{9}{13}\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{13}\,\overrightarrow{AC}$，則$\overline{BF}:\overline{FC}=4:9$

(4)╳：$\dfrac{\triangle ABP\text{ 的面積}}{\triangle ACP\text{ 的面積}}=\dfrac{\triangle ABF\text{ 的面積}}{\triangle ACF\text{ 的面積}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\dfrac{4}{9}$

(5)○：$\triangle ABP$ 的面積$=\dfrac{13}{16}\triangle ABF$ 的面積

$=\dfrac{13}{16}\times\dfrac{4}{13}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$ 的面積

故選(1)(2)(5)。

8. (1)(2)(4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列、等差中項、級數

解析：(1)○：由 $a_4+a_{17}=2a_1+19d=0$，又 $a_1<0$，則 $d>0$

(2)○：由 $a_4+a_{17}=0\Rightarrow a_2+a_{19}=0$

(3)╳：由 $a_4+a_{17}=0\Rightarrow a_{10}+a_{11}=0$ 且 $d>0$，

則 $a_{10}<0$ 且 $a_{11}>0$

(4)○：承(3)，$S_{10}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}$ 都是負值相加，

且 $S_{11}=S_{10}+a_{11}>S_{10}$，則 S_{10} 為最小值

(5)╳：$S_{20}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})+\cdots\cdots+(a_{10}+a_{11})$

$=0$

故選(1)(2)(4)。

9. (1)(2)(3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數函數與對數函數的圖形概念

解析：(1)○：因為 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的圖形凹口向上，

則$\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^a+\left(\dfrac{1}{3}\right)^b}{2}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{a+b}{2}}$

(2)○：$\log_2 5>\log_2 4=2=\log_3 9>\log_3 5$

(3)○：$7\log_5 2=\dfrac{7\log 2}{\log 5}=\dfrac{\log 2^7}{\log 5}=\dfrac{\log 128}{\log 5}$

$=\log_5 128>\log_5 127$

(4)╳：$7^{\log_2 5}=(2^{\log_2 7})^{\log_2 5}=(2^{\log_2 5})^{\log_2 7}=5^{\log_2 7}$

(5)╳：因為 $y=\log_2 x$ 的圖形凹口向下，

則$\dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2}<\log_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

故選(1)(2)(3)。

10. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：熟練三角比的定義與廣義角的三角比

解析：(1)○：$\theta=45^\circ$ 時，$\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}=\tan 45^\circ>0$

(2)╳：$\sin\theta\tan\theta=\sin\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}<0$

$\Rightarrow\cos\theta<0$，不可能為第一象限角

(3)○：$\theta=30^\circ$ 時，$\sin 30^\circ<\cos 30^\circ$

(4)╳：$(\sin\theta+2)(\sin\theta-1)=0$

$\Leftrightarrow\sin\theta=1\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，

其中 k 為整數，不可能為第一象限角

(5)○：$\theta=75^\circ$ 時，$\sin 225^\circ<0$ 且 $\cos 225^\circ<0$

故選(1)(3)(5)。

11. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：高次多項式函數，餘式定理

解析：由敘述可知 $f(0)=c=0$，

$f(1)=1+a+b+c=1\Rightarrow b=-a$，

再由 $13\le f(2)\le 15\Rightarrow 13\le 8+4a+2b\le 15$

$\Rightarrow 5\le 2a\le 7\Rightarrow 2.5\le a\le 3.5$，則 $a=3$ 且 $b=-3$

$f(x)=x^3+3x^2-3x=x(x^2+3x-3)=(x+1)^3-6(x+1)+5$

圖形的對稱中心為 $(-1,5)$，在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=-6(x+1)+5=-6x-1$

(1)○：$a+b+c=0$

(2)○：$f(x)=x(x^2+3x-3)$，其中 $x^2+3x-3=0$ 的判別式 $D=3^2-4\times(-3)>0$，有三個交點

(3)╳：$y=f(x)$ 的圖形經過適當平移後會與 $y=x^3-6x$ 的圖形重合

(4)○：圖形的對稱中心為 $(-1,5)$

(5)╳：在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=-6x-1$

故選(1)(2)(4)。

12. (1)(4)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率與貝氏定理的解讀

解析：依照題意，將患病者與檢驗結果的比例表列如下

	檢驗－患病	檢驗－不患病
真實－患病 10 %	$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{85}{100}=8.5\,\%$	$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{15}{100}=1.5\,\%$
真實－不患病 90 %	$\dfrac{9}{10}\times\dfrac{5}{100}=4.5\,\%$	$\dfrac{9}{10}\times\dfrac{95}{100}=85.5\,\%$

(1)○：檢驗結果為患有疾病的機率為

$8.5\,\%+4.5\,\%=13\,\%>10\,\%$

(2)╳：若檢驗結果為患有疾病，則此人真實不患此病的機率為$\dfrac{4.5\,\%}{8.5\,\%+4.5\,\%}\approx 34.6\,\%<35\,\%$

(3)╳：若檢驗結果為不患有疾病，則此人真實患有疾病的機率為$\dfrac{1.5\,\%}{1.5\,\%+85.5\,\%}\approx 1.7\,\%>1\,\%$

(4) ○：設真實患病的人數比例為 p，

則被錯誤判斷的機率為

$p\times\frac{15}{100}+(1-p)\times\frac{5}{100}=\frac{10p+5}{100}=\frac{p}{10}+\frac{1}{20}$，

確實會因為 p 的下降，使得錯誤判斷的機率下降

(5) ○：承(4)，因為 $p\geq 0$，若真實患病人數不歸零，

則 $\frac{1}{10}p+\frac{1}{20}>5\ \%$

故選(1)(4)(5)。

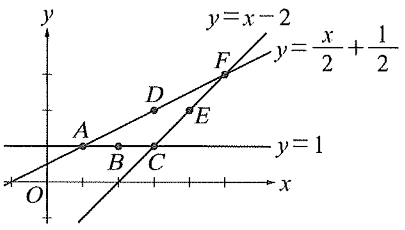
三、選填題

13. $\frac{1}{10}$

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：相關係數的定義，組合，古典機率

解析：



六點中只有 A、D、F 在直線 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ 上

C、E、F 在直線 $y=x-2$ 上，這兩組相關係數 $r=1$

而 A、B、C 在水平線 $y=1$ 上，相關係數 $r=0$

其他組均不共線，所求機率為 $\frac{2}{C_3^6}=\frac{1}{10}$。

14. 24

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值方程式

解析：假設 C 的坐標為 x，依題意列式可得

$\frac{1}{2}\cdot|x-1|+\frac{1}{3}\cdot|x-9|=10$

$\Rightarrow 3|x-1|+2|x-9|=60$

若為「錯過了」$\Rightarrow x>9$，

則 $5x-21=60\Rightarrow x=\frac{81}{5}=c_1$

若為「一開始就走錯方向」$\Rightarrow x<1$，

則 $21-5x=60\Rightarrow x=-\frac{39}{5}=c_2$

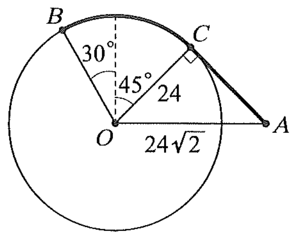
所求 $c_1-c_2=\frac{81}{5}-\left(-\frac{39}{5}\right)=\frac{120}{5}=24$。

15. 55

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈三角函數〉

目標：圓的切線段長，弧長公式

解析：將圖繪出如下，



A 點為小天的位置，B 點為小明的位置，O 點為圓心

小天先從 A 點走向水池邊緣上的 C 點，再順著邊緣走到 B 點

由 $\cos\angle AOC=\frac{24}{24\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可知 $\angle AOC=45^\circ$，$\triangle AOC$ 為等腰直角三角形，

所以 $\overline{AC}=\overline{OC}=24$，

$\angle BOC=30^\circ+45^\circ=75^\circ=\frac{5\pi}{12}\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=24\times\frac{5\pi}{12}=10\pi$，

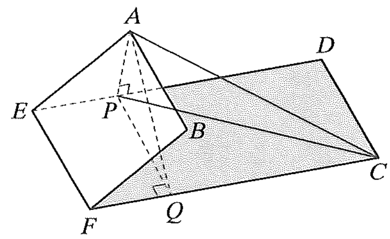
則路徑長為 $24+10\pi\approx 55$ 公尺。

16. $\sqrt{133}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：三垂線定理的應用

解析：做 $\overline{AP}\perp\overline{ED}$ 且 $\overline{PQ}\perp\overline{FC}$，



由三垂線定理可知

$\triangle APQ$、$\triangle APC$ 與 $\triangle AQC$ 皆為直角三角形

再由 $18=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{EA}|\times|\overrightarrow{ED}|\times\cos\angle AED$

$\Rightarrow\cos\angle AED=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle AED=60^\circ$

則 $\overline{AP}=\overline{AE}\times\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\overline{EP}=\overline{AE}\times\cos 60^\circ=\frac{3}{2}\Rightarrow\overline{QC}=\frac{21}{2}$

最後由畢氏定理可知

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AQ}^2+\overline{QC}^2}=\sqrt{(\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2)+\overline{QC}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+4^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2}=\sqrt{133}$。

〈另解〉

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$，則

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2+|\overrightarrow{ED}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}$

$+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=3^2+12^2+4^2+2\cdot(-18)+0+0=133$

故 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{133}$。

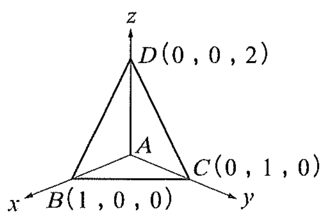
17. $\frac{4}{9}$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：活用截距式與柯西不等式

解析：將 A 置於坐標空間原點，

令 $B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,2)$，



則由截距式可得平面 BCD 方程式 $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$

$\Rightarrow 2x+2y+z=2$

設 P 點為 (a, b, c)，則有 $2a+2b+c=2$

且 P 點到三平面的距離平方和為 $a^2+b^2+c^2$，

由柯西不等式 $(a^2+b^2+c^2)(2^2+2^2+1^2)\geq(2a+2b+c)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{4}{9}$，故最小值為 $\frac{4}{9}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：重複排列

解析：每一格有黑白兩種情形，總共有 9 格，

即有 2^9 種結果

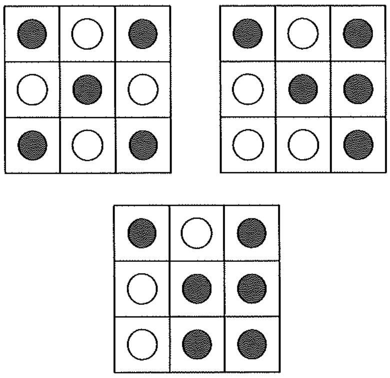
故選(4)。

19. $\frac{28}{143}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率

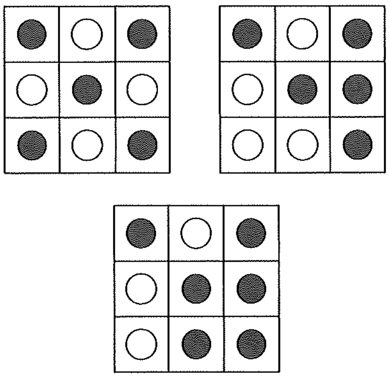
解析：恰連成兩條線的情況有 3 種，如下表示



機率為 $\dfrac{7\times6\times6\times5+6\times7\times6\times5+6\times7\times5\times4}{13\times12\times11\times10}=\dfrac{28}{143}$。

◎評分原則

恰連成兩條線的情況有 3 種，如下表示(每種 1 分，共 3 分)



機率為 $\dfrac{7\times6\times6\times5+6\times7\times6\times5+6\times7\times5\times4}{13\times12\times11\times10}=\dfrac{28}{143}$。

(算出最後答案給 2 分)

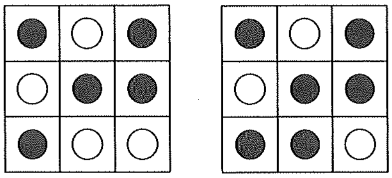
20. $\frac{14250}{11}$ 元

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值

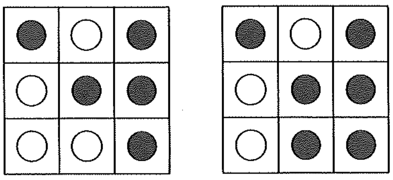
解析：Ⅰ. 恰連成 1 條線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{5\times7\times6+5\times4\times7}{12\times11\times10}=\dfrac{35}{132}$



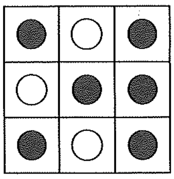
Ⅱ. 恰連成 2 條線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{7\times6\times5+7\times5\times4}{12\times11\times10}=\dfrac{35}{132}$



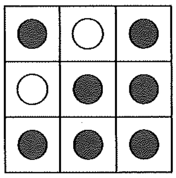
Ⅲ. 恰連成 3 條線的情況有 1 種，機率為

$\dfrac{5\times7\times4}{12\times11\times10}=\dfrac{7}{66}$



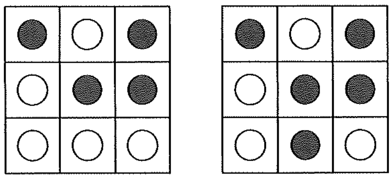
Ⅳ. 恰連成 4 條線的情況有 1 種，機率為

$\dfrac{5\times4\times3}{12\times11\times10}=\dfrac{1}{22}$



Ⅴ. 沒有連線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{7\times6\times5+7\times5\times6}{12\times11\times10}=\dfrac{7}{22}$



由 Ⅰ～Ⅴ 可知所求期望值

$E=\dfrac{7}{22}\times0+\dfrac{35}{132}\times1000+\dfrac{35}{132}\times2000+\dfrac{7}{66}\times3000$

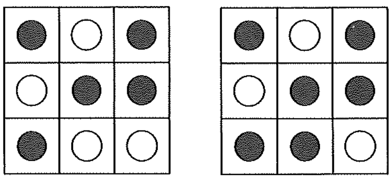
$+\dfrac{1}{22}\times4000$

$=\dfrac{14250}{11}$(元)。

◎評分原則

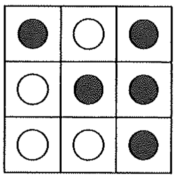
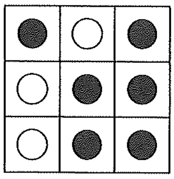
Ⅰ. 恰連成 1 條線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{5\times7\times6+5\times4\times7}{12\times11\times10}=\dfrac{35}{132}$ (1 分)



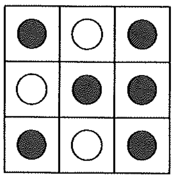
Ⅱ. 恰連成 2 條線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{7\times6\times5+7\times5\times4}{12\times11\times10}=\dfrac{35}{132}$ (1 分)

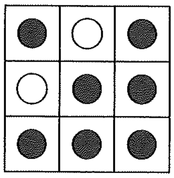
Ⅲ. 恰連成 3 條線的情況有 1 種，機率為

$\dfrac{5\times7\times4}{12\times11\times10}=\dfrac{7}{66}$ (1 分)



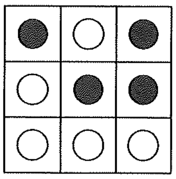
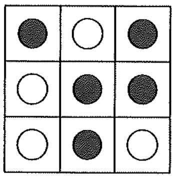
Ⅳ. 恰連成 4 條線的情況有 1 種，機率為

$\dfrac{5\times4\times3}{12\times11\times10}=\dfrac{1}{22}$ (1 分)



Ⅴ. 沒有連線的情況有 2 種，機率為

$\dfrac{7\times6\times5+7\times5\times6}{12\times11\times10}=\dfrac{7}{22}$ (1 分)

由Ⅰ～Ⅴ可知所求期望值

$E=\dfrac{7}{22}\times0+\dfrac{35}{132}\times1000+\dfrac{35}{132}\times2000+\dfrac{7}{66}\times3000$

$+\dfrac{1}{22}\times4000$

$=\dfrac{14250}{11}$(元)。(算出最後答案給 2 分)