

# 臺北區 111 學年度第一學期第二次學測模擬考

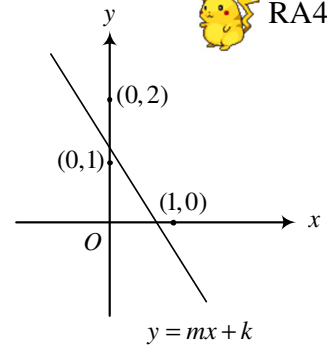
## 數學 A(111-B2)



### 第壹部分：選擇題(占 85 分)

#### 一、單選題(占 25 分)

1. 在坐標平面上，直線  $y = mx + k$  的圖形如右圖所示，其中  $m$ 、 $k$  皆為實數，則下列哪一個式子是正確的？  
 (1)  $mk < -1$  (2)  $-1 < mk < 0$  (3)  $mk = 0$   
 (4)  $0 < mk < 1$  (5)  $mk > 1$



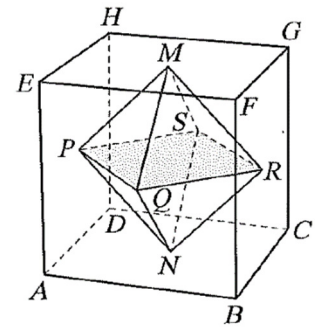
2. 小明、小美與小強三人進行籃球戰術訓練。訓練過程中，小明在戰術板上以三角形  $ABC$  中的  $A$  點為起點，繞一圈再回到  $A$  點。小明先行測出  $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ ，小美測出  $\overline{BC} = 5$ ，小強測出  $\overrightarrow{CA} = (2x, -x)$  且  $x$  為大於 0 的實數，請問  $x$  之值為何？

- (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{3}{4}$  (3) 1 (4) 2 (5)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. 某國有一個經濟學家提出一個觀察：年收入超過  $x$  美元( $x$  為正整數)的人數占全體人數的  $\frac{c}{x^k}$  (其中  $k = \frac{1}{3}$ ， $c$  為一常數)。已知該國人民年收入的第 50 百分位數為 8000 美元，則該國人民年收入的第 75 百分位數約為多少美元？  
 (1) 2300 美元 (2) 6400 美元  
 (3) 12000 美元 (4) 23000 美元 (5) 64000 美元

4. 已知  $f(x) = -4x^3 + 3x$ ，若  $f(\sin \theta) = \sin 2\theta$  且  $\theta$  為銳角，試問  $\cos \theta$  為下列哪一個選項中方程的根？  
 (1)  $x^2 - x - 1 = 0$  (2)  $2x^2 - x - 1 = 0$  (3)  $4x^2 - 2x - 1 = 0$   
 (4)  $4x^2 + 2x - 1 = 0$  (5)  $x^2 + x + 1 = 0$

5. 已知正立方體  $ABCD-EFGH$ ，將其六個面之中心點  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ 、 $M$ 、 $N$  相連，形成正八面體，如右圖所示，請問平面  $MQR$  與平面  $BCF$  夾角的餘弦值為多少？



- (1)  $\pm \frac{1}{3}$  (2)  $\pm \frac{1}{2}$  (3)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (4)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (5)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

#### 二、多選題(占 25 分)

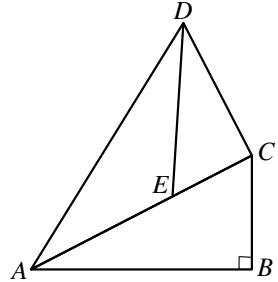
6. 坐標平面上三點  $P(1, 0)$ 、 $Q(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $R(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  且原點為  $O(0, 0)$ ，對於下列二階方陣的敘述，請選出正確的選項。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1)  $Q$  點經過  $B$  的變換後，變換至  $R$  點 (2) 「 $\triangle PQR$  經過  $B$  的變換後所得圖形面積」 = 「 $\triangle PQR$  經過  $C$  的變換後所得圖形面積」 (3) 若  $Q$  點經過  $C$  的變換後，變換至  $Q'$  點，則「 $Q$  點到原點的距離」 = 「 $Q'$  點到原點的距離」 (4)  $\triangle PQR$  經過  $A, B, C, D, E$  的各自變換後，其中有 3 個變換保持  $\triangle PQR$  原本的形狀和大小 (5)  $\triangle PQR$  經過  $E$  的變換後所得圖形面積為  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7. 對於下列的敘述，請選出正確的選項。(1) 若  $0 < b < 1$ ，則  $b^{-6} > b^{-7}$  (2) 若  $0 < b < a$ ，則  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{b} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}$  (3) 若  $0 < b < a$ ，則  $\frac{1}{2} \left( \log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} b \right) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{a+b}{2}$  (4)  $y = 2 \log_4 x$  的圖形可經平移後與  $y = \log_2 4x$  的圖形重合 (5) 方程式  $\log_2 x + 1 - x = 0$  恰有兩個實數解

8. 如右圖所示， $\angle B = 90^\circ$ 。已知  $\overline{DE} = 8$ ， $\tan \angle CDE = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ ， $\overline{CD} = 7$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AB} = 10$ ，請選出正確的選項。



- (1)  $\cos \angle CDE = \frac{11}{14}$  (2)  $0^\circ < \angle CDE < 30^\circ$   
 (3)  $\angle BAC = 30^\circ$  (4)  $\overline{CE} = 5$  (5)  $\overline{AE} = 5(\sqrt{5} - 1)$
9. 已知有  $A, B, C$  三個袋子，各有三種色球若干個，其組成個數如下：  
 $A$  袋(綠球 4 個，藍球 5 個，白球 3 個)； $B$  袋(綠球 5 個，藍球 5 個，白球 2 個)； $C$  袋(綠球 6 個，藍球 3 個，白球 3 個)，有一抽獎遊戲規則如下：  
 先從  $A, B, C$  三個袋子中取出一袋，每個袋子被取出的機會相同，再從袋中一次取兩球，每個球被取出的機會亦相同。若取出兩個綠球或兩個藍球可得 100 元，若取出兩個白球可得 150 元。若取出綠白各一球或藍白各一球可得 200 元，若取出綠藍各一球可得 250 元。對於下列的敘述，請選出正確的選項。

- (1) 在  $A, B, C$  三個袋子中， $B$  袋取出兩個白球的機率最小  
 (2) 在  $A, B, C$  三個袋子中， $C$  袋取出異色兩球的機率最大  
 (3) 在  $A$  袋中，至少獲得獎金 150 元的機率大於  $\frac{5}{6}$  (4) 在  $A$  袋中，獎金期望值小於 200 元  
 (5) 在  $A, B, C$  三個袋子中，從  $C$  袋獲得獎金的期望值為最高
10. 關於函數  $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin 2x$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的最小值為  $-1$  (2)  $f(x)$  是一個週期函數，其週期為  $\pi$  (3)  $y = f(x)$  的圖形對稱於鉛垂線  $x = -\frac{\pi}{6}$  (4) 在  $0 \leq x < \frac{5\pi}{12}$  範圍內， $y = f(x)$  的圖形為遞減 (5) 把  $y = \cos 2x$  的圖形向左平移  $\frac{\pi}{12}$  單位後，可得  $y = f(x)$  的圖形

### 三、選填題(占 35 分)

11. 設  $a > 0, b > 0$  且  $ab = 49$ ，則  $\frac{9}{a} + \frac{4}{b} - 1$  的最小值為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

12. 已知等比數列  $\langle a_n \rangle$  的每一項均為實數，前 9 項的乘積為 1，且  $a_{13} = \frac{1}{16}$ ，則  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} =$ \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

13. 設  $A(a, 1), B(1, b), P(2, 3)$  為坐標平面上三點，已知  $\overline{PA}$  與  $\overline{PB}$  互相垂直，當行列式  $\begin{vmatrix} a & 2b \\ -2b & a \end{vmatrix}$  的值為最小值時，則此時  $\triangle PAB$  的面積為\_\_\_\_\_。

14. 為了有效防止 COVID-19 疾病傳播及降低染病後的重症率和死亡率，某國政府通過 A、M、B、G 四種 COVID-19 疫苗的緊急授權(EUA)，供符合年齡的該國國人施打第 1 劑。依據該國政府規定，民眾以完成同一廠牌 COVID-19 疫苗 2 劑(基礎劑)接種為原則，若第 2 劑要實施混打的民眾，施打規定如下表一；另外，第 3 劑(追加劑)的施打規定如下表二，

其中，若前兩劑疫苗混打，第3劑規定只可選擇已經施打過的疫苗廠牌，不可施打第三種疫苗廠牌。請問，依該國的規定，民眾若都接種完整的三劑疫苗，請問在疫苗接種紀錄卡上，最多可以看到\_\_\_\_\_種不同的接種結果。

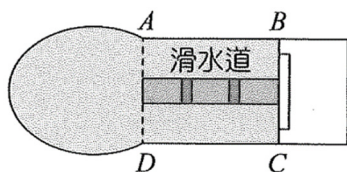
表一：第2劑混打的施打規定

第1劑廠牌	第2劑可接種廠牌
A	M、B、G
M	B、A、G
B	M、A、G
G	M、B

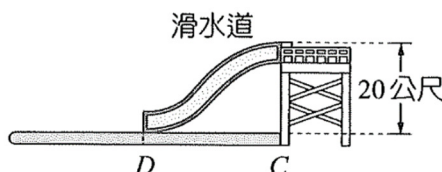
表二：第3劑(追加劑)的施打規定

基礎劑 (第1劑、第2劑) 同廠牌	追加劑 (第3劑) 可接種廠牌
M、B、G	M、B、G、A
A	M、B、G

15. 某遊樂園擬於矩形泳池  $ABCD$  區域中，設置一滑水道，上視圖如圖(一)，上視圖中滑水道矩形區域，其長邊平行  $\overline{CD}$ 。此高 20 公尺的滑水道縱剖面圖形為三次函數圖形的一部分，如圖(二)所示，且滑道中點恰為三次函數圖形的對稱中心。又為安全考量，在中點附近的圖形近似於斜率為  $\frac{1}{2}$  的直線，在水道接近水面附近的圖形近似於斜率為  $\frac{1}{4}$  的直線。則邊長  $\overline{CD}$  至少為\_\_\_\_\_公尺。(四捨五入至整數位)



圖(一)滑水道上視圖



圖(二)滑水道縱剖面圖

16. 若在空間中  $\vec{a} = (1, 2, x-1)$ 、 $\vec{b} = (-1, 2, x+3)$  與  $\vec{c} = (4, 1, -x)$ ，三個向量皆互相垂直，則  $x$  為\_\_\_\_\_。
17. 某國海軍潛艇在兩國邊界巡邏時被魚雷打中擊沉，搜尋小隊經過分析後得出：潛艇殘骸有 20% 的機率落在本國海城，此時打撈殘骸的成功機率為 80%，另外有 80% 的機率落在敵國海域，則打撈作業較為危險，只有 20% 的成功機率。當在本國海城打撈失敗時，會重新進行第二次打撈，若還是失敗，會重新進行第三次打撈後即停止，每次打撈成功的機率都不會改變，但在敵國海城只會打撈一次。若潛艇殘骸被打撈成功，則是在本國海城打撈起來的機率為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

**第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)**

**18-20 題為題組**

某生決定投擲一顆公正的骰子，來模擬產生多項式的係數，假設第一次出現的點數為  $a$  第二次的點數為  $b$ ，第三次的點數為  $c$ ，則生成二次多項式  $f(x) = ax^2 + 9x + a$  與三次多項式  $g(x) = x^3 + (b+1)x^2 + (\frac{c}{2})x + 1$ ，試問：

18. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為相異三數，且多項式  $f(x)$  與  $g(x)$  的係數皆為整數，則總共可產生多少組不同的多項式  $f(x)$  和  $g(x)$ ？ (單選題，3 分)

(1)  $C_3^6$  (2)  $P_3^6$  (3)  $C_1^3 \times C_1^5 \times C_1^4$  (4)  $C_1^3 \times C_2^5$  (5)  $C_1^3 \times P_2^6$

19. 若  $f(x) = ax^2 + 9x + a$  的圖形恆在  $x$  軸上方，求  $a$  之值。(非選擇題，5 分)

20. 若  $g(x) = x^3 + (b+1)x^2 + (\frac{c}{2})x + 1$  的對稱中心為點  $(\alpha, \beta)$ ，求  $(\alpha, \beta)$  為整數點的機率。

(非選擇題，7 分)

**RA4102 臺北區 111 學年度第一學期第二次學測模擬考數學 A(111-B2)**

**參考答案**

**選擇題：**1. (1) 2. (4) 3. (5) 4. (3) 5. (5) 6. (1)(2)(5) 7. (4)(5) 8. (1)(4)(5) 9. (1)(4)  
10. (1)(2)(4)(5)

**選填題：**11.  $\frac{5}{7}$  12.  $\frac{63}{8}$  13. 2 14. 37 15. 48 16. -2 17.  $\frac{31}{56}$

**混合題：**18. (3) 19. 5 或 6 20.  $\frac{1}{4}$