數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(5)	(3)	(5)	(1)(2)(5)	(4)(5)
8.	9.	10.				
(1)(4)(5)	(1)(4)	(1)(2)(4)(5)				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能判斷直線方程式的斜率及截距

解析：由直線及 y 軸上兩點可知

斜率 $m<\dfrac{0-1}{1-0}\Rightarrow m<-1$

與 y 軸截距 $1<k<2$，可得 $mk<-1$

故選(1)。

2. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量的基本運算

解析：$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=(2x+1,-x+2)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{CB}|=\overline{BC}$

$\Rightarrow\sqrt{(2x+1)^2+(-x+2)^2}=5$

$\Rightarrow 5x^2=20\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=2$ (x 為大於 0 的實數)

故選(4)。

3. (5)

出處：第二冊〈數據分析〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：能夠計算百分位數

解析：已知第 50 百分位數為 8000 美元

故 $\dfrac{c}{8000^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{c}{20}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=10$

假設該國人民年收入的第 75 百分位數為 a

則 $\dfrac{10}{a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a^{\frac{1}{3}}=40$

$\Rightarrow a=64000$ (美元)

故選(5)。

4. (3)

出處：第三冊〈三角函數〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：熟悉二倍角，並應用在多項式方程式中

解析：已知 $f(\sin\theta)=\sin 2\theta$

$\Rightarrow -4\sin^3\theta+3\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow -4\sin^2\theta+3=2\cos\theta$

$\Rightarrow -4(1-\cos^2\theta)+3=2\cos\theta$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\therefore\cos\theta$ 為方程式 $4x^2-2x-1=0$ 之一根

故選(3)。

5. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：能夠建立空間坐標系，透過法向量的夾角為平面的夾角，求得其餘弦值

解析：建立空間坐標系，令 D 點為原點 $(0,0,0)$，

$A(2a,0,0)$、$C(0,2a,0)$、$H(0,0,2a)$ 且 $a\neq0$

其中 $\overrightarrow{DA}$ 為 x 軸正向，$\overrightarrow{DC}$ 為 y 軸正向，$\overrightarrow{DH}$ 為 z 軸正向

可得 $Q(2a,a,a)$、$M(a,a,2a)$、$R(a,2a,a)$、$B(2a,2a,0)$、$F(2a,2a,2a)$

$\overrightarrow{QM}\times\overrightarrow{QR}$ 可得平面 MQR 的法向量為 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$

又平面 BCF 法向量為 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$

令兩個法向量夾角為 θ，則

$$|\cos\theta|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故兩平面夾角的餘弦值為 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故選(5)。

二、多選題

6. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：熟練矩陣的計算及矩陣變換

解析：(1) ○：

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

故 Q 點經過 B 的變換後，變換至 R 點

(2) ○：$\det B=\det C=1$

故△PQR 經過 B、C 變換後的面積不變

(3) ×：

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

故 $Q'\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

則 $\overline{OQ}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

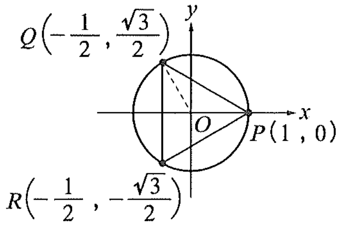
$\overline{OQ'}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow\overline{OQ}\neq\overline{OQ'}$

(4) ×：A 為鏡射矩陣，B 為旋轉矩陣

故經過 A 或 B 的變換後不改變圖形的形狀及大小，C 為推移矩陣，D 為伸縮矩陣，E 為一般矩陣，故經過 C、D、E 的變換後會改變圖形的形狀

(5) ○：如下圖所示



$\triangle PQR$ 面積

$=3\triangle OPQ$ 面積

$=3\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin120^\circ\right)$

$=3\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\triangle PQR$ 經 E 變換後所得到的圖形面積

$=|\det E|\times\triangle PQR$ 面積

$=\left|\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}\right|\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故選(1)(2)(5)。

7. (4)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數函數的圖形

解析：(1)╳：由 $1>b>0$ 得 $\frac{1}{b}>1$

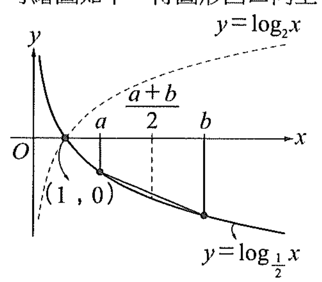
$\Rightarrow\left(\frac{1}{b}\right)^6<\left(\frac{1}{b}\right)^7\Rightarrow b^{-6}<b^{-7}$

(2)╳：由 $a>b>0$ 得 $\log_2 a>\log_2 b$

$\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{b}$

(3)╳：$y=\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log x}{\log\frac{1}{2}}=\frac{\log x}{-\log 2}=-\log_2 x$

可繪圖如下，得圖形凹口向上



故可由圖形可得知

$\frac{1}{2}\left(\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b\right)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{a+b}{2}$

(4)○：$y=2\log_4 x=2\times\frac{1}{2}\log_2 x=\log_2 x$

$y=\log_2 4x=\frac{\log 4x}{\log 2}=\frac{\log 4+\log x}{\log 2}$

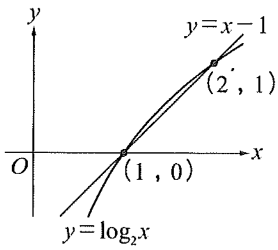
$=\frac{2\log 2+\log x}{\log 2}=2+\frac{\log x}{\log 2}=2+\log_2 x$

故 $y=2\log_4 x$ 的圖形向上平移 2 單位可得

$y=\log_2 4x$ 的圖形

(5)○：$\begin{cases}f(x)=\log_2 x\\g(x)=x-1\end{cases}$

如下圖，兩圖形有兩個交點 $(1,0)$，$(2,1)$



故 $\log_2 x-x+1=0$ 有兩個實數解

故選(4)(5)。

8. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：tan 函數的值域、三角比轉換與餘弦定理

解析：(1)○：由 $\tan\angle CDE=\frac{5\sqrt{3}}{11}$ 得 $\cos\angle CDE=\frac{11}{14}$

(2)╳：$\tan\angle CDE=\frac{5\sqrt{3}}{11}>\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $\angle CDE>30^\circ$

(3)╳：$\overline{BC}=5$，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=5\sqrt{5}$

$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $\angle BAC\neq30^\circ$

(4)○：由餘弦定理可得

$\overline{CE}^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\angle CDE=25$

所以 $\overline{CE}=5$

(5)○：承(3)、(4)，$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=5(\sqrt{5}-1)$

故選(1)(4)(5)。

9. (1)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠計算期望值及機率

解析：(1)○：$P(A$ 袋取出 2 白球$)=\frac{C^3_2}{C^{12}_2}$

$P(B$ 袋取出 2 白球$)=\frac{C^2_2}{C^{12}_2}$

$P(C$ 袋取出 2 白球$)=\frac{C^3_2}{C^{12}_2}$

因為分母相同，故比較分子即可

因此 $P(B$ 袋取出 2 白球$)$最小

(2)╳：$P(A$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\frac{C^4_1C^5_1+C^5_1C^3_1+C^4_1C^3_1}{C^{12}_2}=\frac{47}{C^{12}_2}$

$P(B$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\frac{C^5_1C^5_1+C^5_1C^2_1+C^5_1C^2_1}{C^{12}_2}=\frac{45}{C^{12}_2}$

$P(C$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\frac{C^6_1C^3_1+C^3_1C^3_1+C^6_1C^3_1}{C^{12}_2}=\frac{45}{C^{12}_2}$

因為分母相同，故比較分子即可

因此 $P(A$ 袋取出異色 2 球$)$最大

(3)╳：$P(A$ 袋至少獲得 150 元$)$

$=1-\frac{C^4_2+C^5_2}{C^{12}_2}=1-\frac{16}{66}=\frac{50}{66}<\frac{55}{66}=\frac{5}{6}$

(4)○：A 袋中，獎金期望值

$=100\times\frac{C^4_2+C^5_2}{C^{12}_2}+150\times\frac{C^3_2}{C^{12}_2}$

$+200\times\frac{C^4_1C^3_1+C^5_1C^3_1}{C^{12}_2}+250\times\frac{C^4_1C^5_1}{C^{12}_2}$

$=\frac{1600+450+5400+5000}{C^{12}_2}$

$=\frac{12450}{66}<200$

(5) ╳：C 袋中，獎金期望值

$$=100\times\frac{C_2^6+C_2^3}{C_2^{12}}+150\times\frac{C_2^3}{C_2^{12}}$$

$$+200\times\frac{C_1^6C_1^3+C_1^3C_1^3}{C_2^{12}}+250\times\frac{C_1^6C_1^3}{C_2^{12}}=\frac{12150}{66}$$

由(4)可知，從 C 袋中獲得的獎金期望值不是最高的

故選(1)(4)。

10. (1)(2)(4)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合、三角函數的圖形

解析：$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$

$$=\sqrt{3}\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+\sin 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

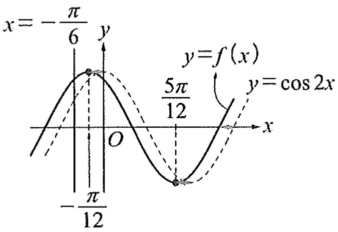
(1) ○：最小值為 -1

(2) ○：週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

(3) ╳：如下圖所示，$y=f(x)$ 的圖形不對稱於 $x=-\frac{\pi}{6}$

(4) ○：如下圖所示，可知在 $0\le x<\frac{5\pi}{12}$ 範圍內，$y=f(x)$ 的圖形為遞減

(5) ○：將 $y=\cos 2x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 單位，可得 $y=f(x)$ 的圖形，如下圖所示



故選(1)(2)(4)(5)。

三、選填題

11. $\frac{5}{7}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：熟悉算幾不等式之運用

解析：$\frac{9}{a}+\frac{4}{b}\ge 2\sqrt{\frac{9}{a}\times\frac{4}{b}}=2\sqrt{\frac{36}{ab}}=2\sqrt{\frac{36}{49}}=2\times\frac{6}{7}=\frac{12}{7}$

$\Rightarrow\frac{9}{a}+\frac{4}{b}-1\ge\frac{12}{7}-1=\frac{5}{7}$

等號成立於 $\frac{9}{a}=\frac{4}{b}\Rightarrow a=\frac{9b}{4}$

代入 $ab=49$，解得 $b=\pm\frac{14}{3}$ (負不合)

即當 $a=\frac{21}{2}$，$b=\frac{14}{3}$ 時，等號成立

可得所求之最小值為 $\frac{5}{7}$。

12. $\frac{63}{8}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能夠利用題目所提供條件求出級數和

解析：$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6\times a_7\times a_8\times a_9=1$

$\Rightarrow a_1^{\,9}r^{36}=(a_1r^4)^9=1$

$a_5=a_1r^4=1$ 且 $a_{13}=\frac{1}{16}$

$\Rightarrow r^2=\frac{1}{2}$，$a_1=4$

故 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$

$=a_1(1+r^2+r^4+r^6+r^8+r^{10})$

$=\frac{a_1\times(1-r^{12})}{1-r^2}=\frac{63}{8}$。

13. 2

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：能求極值與行列式

解析：已知 $\overline{PA}\perp\overline{PB}\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$\Rightarrow(a-2,-2)\cdot(-1,b-3)=0\Rightarrow a+2b=8$

當 $\begin{vmatrix}a & 2b\\ -2b & a\end{vmatrix}=a^2+4b^2$ 有最小值時

〔解法一〕

由柯西不等式可知 $(a^2+(2b)^2)(1^2+1^2)\ge(a+2b)^2$

即最小值成立時，$\frac{a}{1}=\frac{2b}{1}\Rightarrow a=4$，$b=2$

故△PAB 的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a-2 & -1\\ -2 & b-3\end{vmatrix}\right|=2$。

〔解法二〕

$a=8-2b$ 代入

$a^2+4b^2=(8-2b)^2+4b^2=8(b-2)^2+32$

即當 $b=2$ 時，有最小值 32，此時 $a=4$

故△PAB 的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a-2 & -1\\ -2 & b-3\end{vmatrix}\right|=2$。

14. 37

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能使用樹狀圖等計數原理

解析：畫樹狀圖如下

第1劑　第2劑　第3劑

A
- A —— 3種
- M —— 2種
- B —— 2種
- G —— 2種

M
- A —— 2種
- M —— 4種
- B —— 2種
- G —— 2種

B
- A —— 2種
- M —— 2種
- B —— 4種
- G —— 2種

G
- M —— 2種
- B —— 2種
- G —— 4種

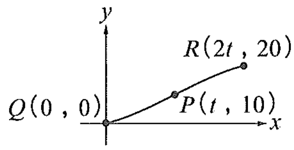
加總可知共有 37 種不同的接種結果。

15. 48

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能夠瞭解並計算三次函數對稱中心及局部特徵之間關係

解析：設滑水道兩端點分別為 $Q(0, 0)$，$R(2t, 20)$，中點為 $P(t, 10)$



$f(x)=a(x-t)^3+b(x-t)+10$

依題意可得 $b=\dfrac{1}{2}$ 且

$f(x)=ax^3-3atx^2+\left(3at^2+\dfrac{1}{2}\right)x-at^3-\dfrac{1}{2}t+10$

因為過 $Q(0, 0)$ 且在 Q 點附近的圖形近似斜率為 $\dfrac{1}{4}$ 的直線，代入函數 $f(x)$ 可得

$$\begin{cases} f(0)=-at^3-\dfrac{1}{2}t+10=0 \\ 3at^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得 $t=24$

故滑水道水平分量長為 48 公尺

依題意滑水道設置在矩形 $ABCD$ 內

故邊長 $\overline{CD}$ 至少為 48 公尺。

16. -2

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：利用向量垂直內積為 0 的性質

解析：〔解法一〕

因為 $\begin{cases} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0 \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} -1+4+(x^2+2x-3)=0 \\ -4+2+(-x^2-3x)=0 \\ 4+2+(-x^2+x)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x=0 \\ x^2+3x+2=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=-2$。

〔解法二〕

利用 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\,/\!/\,\overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(8, -2x-2, 4)$

$\Rightarrow \dfrac{8}{4}=\dfrac{-2x-2}{1}=\dfrac{4}{-x}$

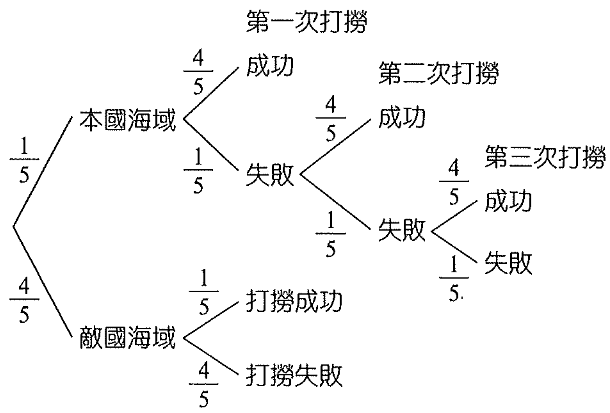
$\Rightarrow x=-2$。

17. $\dfrac{31}{56}$

出處：第四冊〈機率〉

目標：了解貝氏定理及其使用方式

解析：依題意作樹狀圖如下



P(在本國海域 | 打撈成功)

$=\dfrac{\text{在本國第一次成功}+\text{在本國第二次才成功}+\text{在本國第三次才成功}}{\text{在本國第一次成功}+\text{在本國第二次才成功}+\text{在本國第三次才成功}+\text{在敵國成功}}$

$=\dfrac{\left(\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\right)}$

$=\dfrac{31}{56}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠利用排列組合，計算數量

解析：因為多項式 $g(x)$ 的係數皆為整數 $\Rightarrow \dfrac{c}{2}$ 必為整數

$\Rightarrow c$ 只能為 2，4，6

所以由 $c\to a\to b$ 可能有 $C^3_1\times C^5_1\times C^4_1$ 種選擇

故選(3)。

19. 5 或 6

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能夠判斷多項式圖形與判別式之間的關係

解析：判別式為 $81-4a^2<0$

$\Rightarrow a^2>\dfrac{81}{4}$

$\Rightarrow a>\dfrac{9}{2}$ 或 $a<-\dfrac{9}{2} \Rightarrow a=5$ 或 6。

◎評分原則

判別式為 $81-4a^2<0$

$\Rightarrow a^2>\dfrac{81}{4}$　(2 分)

$\Rightarrow a>\dfrac{9}{2}$ 或 $a<-\dfrac{9}{2}$　(2 分)

$\Rightarrow a=5$ 或 6。　(1 分)

20. $\dfrac{1}{4}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：能計算機率及熟悉三次多項式的圖形特徵

解析：設 $P(A)$ 為點 (α, β) 為整數點的機率

$\alpha=-\dfrac{b+1}{3}$ 為整數　$\therefore b=2$ 或 $b=5$

①若 $b=2$，則 $\alpha=-1$，

$\beta=f(\alpha)=-1+3-\dfrac{c}{2}+1$ 為整數

$\therefore c=2$，4，6

②若 $b=5$，則 $\alpha=-2$，

$\beta=f(\alpha)=-8+24-c+1$ 為整數

$\therefore c=1，2，3，4，5，6$

故 $P(A)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。

◎評分原則

設 $P(A)$ 為點 (α,β) 為整數點的機率

$\alpha=-\dfrac{b+1}{3}$ 為整數　$\therefore b=2$ 或 $b=5$　(2 分)

①若 $b=2$，則 $\alpha=-1$，

$\beta=f(\alpha)=-1+3-\dfrac{c}{2}+1$ 為整數

$\therefore c=2，4，6$　(2 分)

②若 $b=5$，則 $\alpha=-2$，

$\beta=f(\alpha)=-8+24-c+1$ 為整數

$\therefore c=1，2，3，4，5，6$　(2 分)

故 $P(A)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。　(1 分)