111 年學科能力測驗第六次模擬考試

數學 A 考科解析

111-W6

第壹部分、選擇（填）題

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
(2)	(4)	(4)	(3)	(5)	(2)	(3)(4)	(1)(2)(4)	(1)(5)	(1)(2)(5)	(1)(4)(5)	(2)(3)(4)	2	5	4
14-2	**14-3**	**14-4**	**14-5**	**15-1**	**15-2**	**15-3**	**16-1**	**16-2**	**17-1**	**17-2**	**17-3**			
1	1	3	2	9	−	7	1	0	6	0	0			

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)　19. $\frac{1}{3}$　20. 14000（元）

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊　多項式函數

【解析】由除法原理可知 $f(x)=(x^2-x-4)g(x)+8x+4$

因為 $x-3$ 為 $f(x)$ 的一次因式

所以由因式定理可知 $f(3)=(9-3-4)g(3)+8\times3+4=0$

$\Rightarrow g(3)=-14$

由餘式定理可知

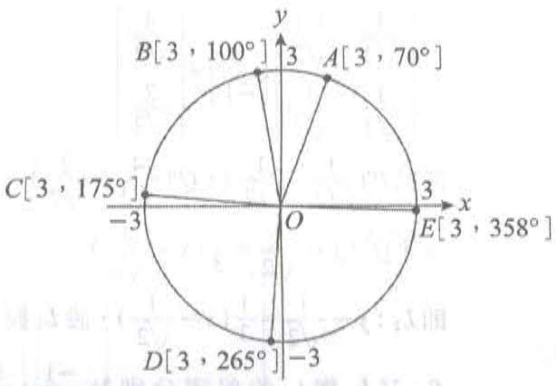
$g(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式 $=g(3)=-14$

故選(2)

2. (4)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊　三角比

【解析】作圖如下：



由圖形可知 D 點與 y 軸的距離最近

故選(4)

3. (4)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊　數據分析

【解析】可知 y 對 x 的迴歸直線通過 $(31，120)$、$(30，116)$ 兩點

所以迴歸直線的斜率 $m=\frac{120-116}{31-30}=4$

又 $m=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$，因此可得 $\frac{10r}{2}=4\Rightarrow r=0.8$

故選(4)

4. (3)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 A　指數與對數函數

【解析】可知 $A(k，\log k)$，$B(k，0)$，$C(k，\log_a k)$

所以 $\overline{AB}=\log k$，$\overline{BC}=-\log_a k$

$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BC}=\log k:(-\log_a k)=2:3$

$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{\log k}{-\log_a k}=\frac{\log k}{\frac{-\log k}{\log a}}=-\log a$

$\Rightarrow \log a=\frac{-2}{3}$

$\Rightarrow a=10^{\frac{-2}{3}}$

故選(3)

5. (5)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊　多項式函數

第三冊 A　三角函數

【解析】$x=0$ 代入 $y=a\sin x+b$ 可得 $y=a\sin 0+b=b$

由圖形可知 $y=a\sin x+b$ 與 y 軸的交點 $(0，b)$ 位於 x 軸上方，所以 $b>0$，又 $x>0$ 時，圖形先下降再上升，因此可知 $a<0$，即 $y=ax^3+bx$ 的圖形最右方為往下降，且通過原點並與 x 軸交於相異三點，故選(5)

6. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 A　指數與對數函數

【解析】因為 $\log_{10}3\approx0.4771$，所以 $3\approx10^{0.4771}$

$\Rightarrow v=\frac{1}{0.01}\times(0.3)^{\frac{2}{3}}\times(\frac{1}{1000})^{\frac{1}{2}}=10^2\times(3\times10^{-1})^{\frac{2}{3}}\times(10^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times10^{2-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}\approx(10^{0.4771})^{\frac{2}{3}}\times10^{\frac{-1}{6}}=10^{\frac{4\times0.4771-1}{6}}$

$=10^{0.1514}\approx10^{0.15}$

故選(2)

二、多選題

7. (3)(4)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊　數列與級數

第四冊 A　矩陣

【解析】設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的公差為 d

可得 $ABC=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_4\\a_2&a_5\\a_3&a_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a_1+a_2+a_3&a_4+a_5+a_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6)&-(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-9d&9d\end{bmatrix}$

(1)✕　$\begin{bmatrix}-9\\9\end{bmatrix}$ 為 2×1 階，所以不合

(2)✕　$\begin{bmatrix}9&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9d&9d\end{bmatrix}\Rightarrow$ 無解，所以不合

(3)○　$\begin{bmatrix}3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9d&9d\end{bmatrix}\Rightarrow d=\frac{-1}{3}$，所以可能與 ABC 相等

(4)○　$\begin{bmatrix}-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9d&9d\end{bmatrix}\Rightarrow d=\frac{2}{9}$，所以可能與 ABC 相等

(5)✕　$\begin{bmatrix}18&-18\\-18&18\end{bmatrix}$ 為 2×2 階，所以不合

故選(3)(4)

8. (1)(2)(4)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊　數與式

第二冊　數列與級數、三角比

第三冊 A　三角函數

【解析】(1)○　因為 $\cos\theta$，$2\sin\theta$，$\tan\theta$ 成等比數列

所以 $(2\sin\theta)^2=\cos\theta\cdot\tan\theta$，又 θ 為銳角

因此可得 $2\sin\theta=\sqrt{\cos\theta\cdot\tan\theta}$

$\Rightarrow(\sqrt{2\sin\theta})^2=\sqrt{\cos\theta}\times\sqrt{\tan\theta}$

即 $\sqrt{\cos\theta}$、$\sqrt{2\sin\theta}$、$\sqrt{\tan\theta}$ 為等比數列

(2)○　由算幾不等式可得 $\frac{\cos\theta+\tan\theta}{2}\geq\sqrt{\cos\theta\tan\theta}=2\sin\theta$

(3)✕　$4\sin^2\theta=\cos\theta\cdot\tan\theta=\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta$

$\Rightarrow\sin\theta(4\sin\theta-1)=0$

$\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}=\sin30^\circ$

所以 $\theta<30^\circ$

(4)○　$\sin\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

所以 $r=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{15}}$

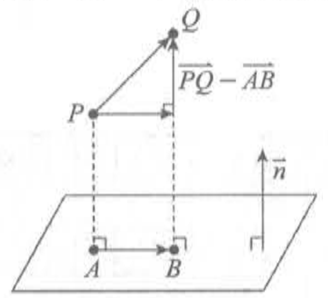
(5)✕　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

故選(1)(2)(4)

9. (1)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 A 空間向量、空間中的平面與直線

【解析】設 $\vec{n}=(2,-1,3)$ 為平面 E 的一組法向量，作圖如下：



可知 $(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})//\vec{n}$，所以 $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$，其中 $t\in R$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}+t\vec{n}=(2,4,0)+(2t,-t,3t)$

$=(2+2t,4-t,3t)$

(1)○ $(2+2t,4-t,3t)=(-4,7,-9)\Rightarrow t=-3$

所以向量 $(-4,7,-9)$ 可能與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等

(2)✕ $(2+2t,4-t,3t)=(-1,6,-6)\Rightarrow$ 無解

所以向量 $(-1,6,-6)$ 不可能與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等

(3)✕ $(2+2t,4-t,3t)=(4,-1,3)\Rightarrow$ 無解

所以向量 $(4,-1,3)$ 不可能與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等

(4)✕ $(2+2t,4-t,3t)=(4,2,0)\Rightarrow$ 無解

所以向量 $(4,2,0)$ 不可能與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等

(5)○ $(2+2t,4-t,3t)=(4,3,3)\Rightarrow t=1$

所以向量 $(4,3,3)$ 可能與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等

故選(1)(5)

10. (1)(2)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 A 空間向量

【解析】設 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(2,0,0)$，$E(0,0,2)$，$F(0,2,2)$，$G(2,2,2)$，$H(2,0,2)$，$P(0,1,2)$

(1)○ $\overrightarrow{PB}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\times2+1\times0+(-2)\times0=0$

所以 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{BC}$

(2)○ 因為 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BP}$，所以 $\overrightarrow{BC}$ 與平面 ABP 垂直

(3)✕ 因為 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$，且承(2)可知 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}$

所以平面 ABC 與平面 PBC 的銳夾角為 $\angle PBA$

設 $\angle PBA=\theta$，作 $\overline{PM}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 M 點

可知 $\overline{PM}=\overline{AE}=2$

$\overline{BP}=\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{BP}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$

所以 $\theta>60°$

(4)✕ $\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)\times(2,1,-2)$

$=(\begin{vmatrix}1&-2\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&0\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix})$

$=(0,-4,-2)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}|=\sqrt{0^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

(5)○ $|\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC})|=|(0,-1,-2)\cdot(0,-4,-2)|$

$=|0+4+4|=8$

另解：$|\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC})|$

$=$ 四面體 $P-ABC$ 體積的 6 倍

$=(\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times2\times2)\times2)\times6=8$

故選(1)(2)(5)

11. (1)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 A 空間中的平面與直線

【解析】(1)○ $\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{2+3a}{4}=\dfrac{4+2}{3}\Rightarrow a=2$

所以當 $a=2$ 時，點 $(3,2,4)$ 位於 L_1 上

(2)✕ 設 $\vec{\ell_1}=(2,4,3)$、$\vec{\ell_2}=(-1,2,1)$ 分別為 L_1、L_2 的一組方向向量，可知 $\vec{\ell_1}$ 與 $\vec{\ell_2}$ 不平行

(3)✕ 承(2)可知 $\vec{\ell_1}$ 與 $\vec{\ell_2}$ 不平行，所以 L_1 與 L_2 不可能平行

(4)○ $\begin{cases}-1+2t=2a-s\\-3a+4t=2s\\-2+3t=3+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-2t-s=-1\cdots\cdots①\\3a-4t+2s=0\cdots\cdots②\\3t-s=5\cdots\cdots③\end{cases}$

$\Rightarrow ①\times3-②\times2：2t-7s=-3\cdots\cdots④$

$\Rightarrow ④-③\times7：-19t=-38\Rightarrow t=2，s=1，a=2$

所以 $a\neq2$ 時，L_1 與 L_2 不相交，又承(3)可知 L_1 與 L_2 不可能平行

即此時 L_1 與 L_2 互為歪斜

(5)○ 承(4)可知 $a=2$ 時，L_1 與 L_2 交於一點 $(3,2,4)$

故選(1)(4)(5)

12. (2)(3)(4) 【難易度】★★★

【出處】第四冊 A 矩陣

【解析】(1)✕ $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos45°&-\sin45°\\\sin45°&\cos45°\end{bmatrix}$

所以 A 定義的線性變換是旋轉變換

(2)○ $A^2=\begin{bmatrix}\cos45°&-\sin45°\\\sin45°&\cos45°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos45°&-\sin45°\\\sin45°&\cos45°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos45°\cos45°-\sin45°\sin45°&-\sin45°\cos45°-\cos45°\sin45°\\\sin45°\cos45°+\cos45°\sin45°&\cos45°\cos45°-\sin45°\sin45°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos90°&-\sin90°\\\sin90°&\cos90°\end{bmatrix}$

所以 A^2 定義的線性變換是旋轉變換

(3)○ 因為 $P(1,0)$、$Q(3,-1)$ 為 L_1 上兩點

(4)○ 且 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

所以 $P'(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，$Q'(\dfrac{4}{\sqrt{2}},\dfrac{2}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{P'Q'}：y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

即 $L_2：y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，設 L_1 與 L_2 的銳夾角為 θ，又 L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\dfrac{-1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$，因此可得

$\tan\theta=\left|\dfrac{\frac{-1}{2}-\frac{1}{3}}{1+(\frac{-1}{2})\times\frac{1}{3}}\right|=1\Rightarrow\theta=45°$

(5)✕ 承(2)可知 $A^2=\begin{bmatrix}\cos90°&-\sin90°\\\sin90°&\cos90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

承(3)可得 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

所以 $P''(0,1)$，$Q''(1,3)\Rightarrow\overleftrightarrow{P''Q''}：y-1=2(x-0)$

即 $L_3：y=2x+1$，因此 L_3 的斜率為 2

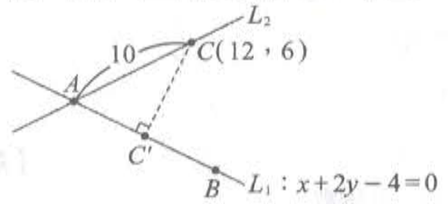
故選(2)(3)(4)

三、選填題

13. $2\sqrt{5}$ 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 直線與圓；第三冊 A 平面向量

【解析】設 C 點在 L_1 上的投影點為 C'，作圖如下：



可知 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影長為 $\overline{AC'}$

又 $\overline{CC'}=d(C,L_1)=\dfrac{|12+2\times6-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

所以 $\overline{AC'}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CC'}^2}=\sqrt{10^2-(4\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

故 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影長為 $2\sqrt{5}$

14. $\frac{41}{132}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】P(至少有 3 顆紅豆湯圓)

$=P$(恰 3 顆紅豆湯圓)$+P$(恰 4 顆紅豆湯圓)

$+P$(恰 5 顆紅豆湯圓)

$=\frac{C_3^5C_2^7}{C_5^{12}}+\frac{C_4^5C_1^7}{C_5^{12}}+\frac{C_5^5}{C_5^{12}}=\frac{210+35+1}{792}=\frac{41}{132}$

15. $(\frac{9}{11},\frac{-7}{11})$ 【難易度】★☆☆

【出處】第三冊 A 平面向量

【解析】設 $A(0,6)$,$B(6,6)$,$C(6,0)$,$D(0,0)$,$E(0,3)$,$F(3,0)$,$G(6,4)$

可知 $\overrightarrow{EF}=(3,-3)$,$\overrightarrow{EG}=(6,1)$,$\overrightarrow{FB}=(3,6)$

因為 $\overrightarrow{EF}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{FB}$

$\Rightarrow(3,-3)=(6a,a)+(3b,6b)=(6a+3b,a+6b)$

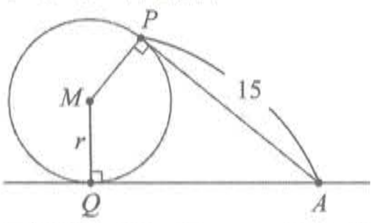
$\Rightarrow\begin{cases}6a+3b=3\\a+6b=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{9}{11}\\b=\frac{-7}{11}\end{cases}$

故 $(a,b)=(\frac{9}{11},\frac{-7}{11})$

16. 10 【難易度】★★★

【出處】第一冊 直線與圓

【解析】設 $Q(0,0)$,$A(m,0)$,$P(n,9)$,且圓心為 $M(0,r)$,其中 $0<n<m$,作圖如下:



可知 $\overline{AQ}=\overline{AP}=15\Rightarrow m=15\Rightarrow A(15,0)$

因為 $\overline{AP}^2=(n-15)^2+(9-0)^2=15^2\Rightarrow(n-15)^2=144=12^2$

所以 $n=3$,27(不合)$\Rightarrow P(3,9)$

又 $\overleftrightarrow{PM}\perp\overleftrightarrow{PA}$,因此 $m_{\overleftrightarrow{PM}}\times m_{\overleftrightarrow{PA}}=-1$

$\Rightarrow\frac{9-r}{3-0}\times\frac{9-0}{3-15}=-1\Rightarrow r=5\Rightarrow 2r=10$

故直徑長為 10 公尺

17. 600 【難易度】★★★

【出處】第二冊 三角比

【解析】設 $\angle PAQ=\theta$,$\overline{AP}=x$,$\overline{AQ}=3x$

由正弦定理可知 $\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}=\overline{AB}\Rightarrow\frac{200\sqrt{6}}{\sin\theta}=120\sqrt{30}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}$

由餘弦定理可得 $\cos\theta=\frac{x^2+(3x)^2-(200\sqrt{6})^2}{2\times x\times 3x}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 6x^2=240000\Rightarrow x=200$

$\Rightarrow\overline{AQ}=3\times200=600$

故艾塔與佳雪兩人的直線距離為 600 公尺

第貳部分、混合題或非選擇題

18-20 題為題組

18. (4) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】定食組合數為 $\underset{\text{主食}}{\underline{5}}\times\underset{A\text{附餐}}{\underline{5}}\times\underset{B\text{附餐}}{\underline{3}}\times\underset{C\text{附餐}}{\underline{5}}\times\underset{D\text{附餐}}{\underline{4}}=1500$(種)

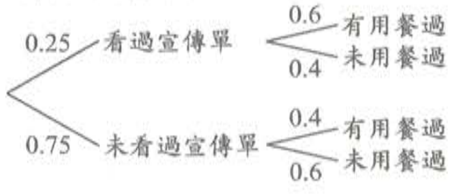
故選(4)

19. $\frac{1}{3}$ 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 A 機率

【解析】設 A 表此社區看過宣傳單者的事件,B 表有到該日式料理店用餐過的居民之事件

可得以下樹狀圖:



所以 $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')}$

$=\frac{0.25\times0.6}{0.25\times0.6+0.75\times0.4}$

$=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

故所求為 $\frac{1}{3}$

20. 14000(元) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率;第四冊 A 機率

【解析】因為每位顧客點餐不互相影響,且每日的平均顧客人數為 100 人,所以每日在主食部分的利潤期望值為:

$E=100(120\times0.3+200\times0.2+150\times0.2+100\times0.25+180\times0.05)$

$=100(36+40+30+25+9)=100\times140=14000$(元)