

# 全國公立高中 112 學年度第四次學測模擬考(數 A)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



## 一、單選題(占 30 分)

1. 已知  $a, b$  為正整數，定義一個新的運算符號  $\{ \}$  滿足  $a\{1\}b = a^b$  及  $a\{n+1\}b = a^{a\{n\}b}$ ， $n \in N$ ，例如： $2\{1\}4 = 2^4$ ， $2\{2\}4 = 2^{2\{1\}4} = 2^{2^4}$ ， $2\{3\}4 = 2^{2\{2\}4} = 2^{2^{2^4}}$ ，...。試問下列哪個選項是數字  $2\{3\}3$  以十進位表示時的位數？ (1) 4 位數 (2) 19 位數 (3) 20 位數 (4) 77 位數 (5) 78 位數
2. 已知一速食店推出「買 A 送 B」的優惠活動，買 A 欄中的任何一品項即送 B 欄中的任何一品項，可自由搭配，飲品中冰/熱視為不同的品項，假設每種品項皆供應無虞，惟需注意供應時間，沒有標註時間的品項即為全天供應。試問正午十二點參加「買 A 送 B」活動，A 欄、B 欄各選一品項共有多少種不同的商品組合？(例如：A 欄美式咖啡(熱)+B 欄雪碧與 A 欄雪碧+B 欄美式咖啡(熱)視為相同的商品組合)

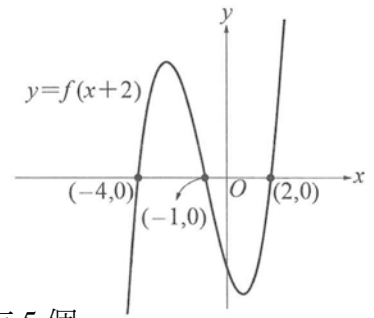
A			
那堤(冰/熱) 卡布奇諾(冰/熱) 美式咖啡(冰/熱)	雪碧 冰紅茶 冰綠茶 冰奶茶	薯餅(上午 11:00 前供應) 薯條(上午 11:00 後供應)	4 塊雞塊 6 塊雞塊
B			
美式咖啡(冰/熱)	雪碧 冰紅茶 冰綠茶 冰奶茶	地瓜餅(上午 11:00 前供應) 地瓜條(上午 11:00 後供應)	大杯玉米濃湯 小杯玉米濃湯

- (1) 104 種 (2) 103 種 (3) 102 種 (4) 101 種 (5) 100 種
3. 已知三個數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  及  $\langle c_n \rangle$ ，其中  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  的遞迴式如下：
- $$\langle a_n \rangle = \begin{cases} 3 & , n=1 \\ a_{n-1} + 2 & , n \geq 2 \text{ 且 } n \in N \end{cases}, \langle b_n \rangle = \begin{cases} 4 & , n=1 \\ b_{n-1} + 4n & , n \geq 2 \text{ 且 } n \in N \end{cases}$$
- 而  $a_n, b_n, c_n$  為直角三角形的三個邊長，且  $c_n$  為斜邊長，試求  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{10}$  之值為何？ (1) 881 (2) 890 (3) 925 (4) 950 (5) 1010
4. 設  $a$  為實數且  $a > 0$ ，已知滿足不等式  $3|x-a| - x \leq a$  的實數解之最小值為 7，試求  $a$  值為何？ (1) 14 (2) 18 (3) 21 (4) 24 (5) 28
5. 已知二階線性變換矩陣  $P$  將點  $A(3,4)$  對應到點  $A'(1,0)$ ， $P$  將點  $B(1,2)$  對應到點  $B'(0,1)$ ，若  $P^{-1}$  將直線  $L: 2x+3y=5$  上所有點都對應到一直線  $L'$ ，試求  $L'$  之斜率為何？ (1)  $-\frac{9}{14}$  (2)  $\frac{9}{14}$  (3)  $-\frac{14}{9}$  (4)  $\frac{8}{7}$  (5)  $-\frac{8}{7}$
6. 已知  $a > b > 0$ ，試問下列等式何者可成立？
- (1)  $\left(a + \frac{4}{a}\right)\left(b + \frac{9}{b}\right) = 23$  (2)  $\left(a + \frac{9}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + b\right) = 24$  (3)  $(a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) = 25$
- (4)  $2^a + 2^{\frac{4}{a}} = 10$  (5)  $\left(\log_3 b\right)\left(\log_3 \frac{9}{b}\right) = 2$

## 二、多選題(占 30 分)

7. 設有 10 筆數據  $(x_i, y_i)$ ，其中  $i=1, 2, \dots, 10$ ，若  $x$  與  $y$  的散布圖上 10 個點均在直線  $y=9-2x$  上，且令資料  $x$  的算術平均數  $\mu_x=3$ ，資料  $x$  的標準差  $\sigma_x=2.5$ ，資料  $y$  的算術平均數  $\mu_y$ ，試選出正確的選項。(1)  $\mu_y=3$  (2) 資料  $y$  的標準差為 4 (3) 另外 10 筆數據  $(4x_i-3, 5-2y_i)$ ，其中  $i=1, 2, \dots, 10$  的相關係數為 1 (4) 若將這 10 筆資料  $L$  標準化後得  $(x'_i, y'_i)$ ，則  $x'$  與  $y'$  的散布圖上 10 個點均在直線  $y'=-x'$  上 (5) 如果原資料再加上一筆數據  $(\mu_x, \mu_y)$ ， $y$  對  $x$  的迴歸直線仍為  $y=9-2x$

8. 已知三次函數  $y=f(x+2)$  的圖形如圖，且  $f(0)=16$ ，試選出正確的選項。



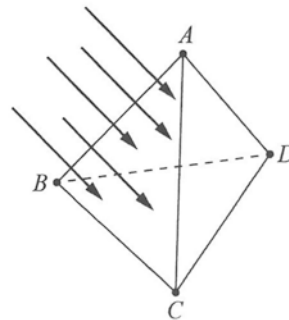
- (1)  $y=f(x)$  的圖形左移 2 單位即為  $y=f(x+2)$   
 (2)  $f(x)$  除以  $x-3$  的餘式為  $-10$   
 (3)  $y=f(x)$  的圖形經過適當平移後會與  $y=x^3-9x$  的圖形重合 (4)  $y=f(x)$  的圖形在對稱中心附近的一次近似直線斜率為  $-18$  (5) 不等式  $(x+2)f(x) \leq 0$  的整數解一共有 5 個
9. 有一圓心為原點且半徑為 4 的圓，將一雷射光源放在點  $H(2\sqrt{3}, 1)$  沿著  $\vec{v}=(0, -1)$  的方向發射，碰到圓後進行反射，依序碰到圓上的點分別為  $A, B, C, D, E, F$ ，最後光線回到  $H$  點，試選出正確的選項。(1) 點  $A$  的極坐標為  $\left[4, \frac{\pi}{6}\right]$  (2)  $\triangle HDE$  面積為  $5\sqrt{3}$   
 (3) 圓上的點與  $H$  點之距離為整數者共有 16 個 (4)  $\vec{HB} \cdot \vec{HF} = -5$   
 (5) 若  $\vec{HB} = \alpha \vec{HA} + \beta \vec{HD}$ ，其中  $\alpha, \beta$  為實數，則  $\alpha + \beta = \frac{7}{3}$
10. 已知函數  $f(x) = \cos 2x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，試選出正確的選項。(1)  $f(x)$  的週期為  $\pi$   
 (2)  $a$  為實數，可知  $f(a) = f\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$  (3) 在區間  $[0, 2\pi)$  中滿足  $f(x) = \frac{1}{2}$  的所有實數  $x$  之和為  $\frac{10}{3}\pi$  (4)  $f(x) = \frac{x}{3}$  有 5 個實根 (5)  $y=f(x)$  的圖形可由  $y=2\sin^2 x$  的圖形經適當(左右、上下)平移得到

11. 已知平面上有四個非零向量  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$ ,  $\vec{d} = \vec{OD}$ ，其中  $O$  為原點，且滿足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$  及  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} > 0$ ， $\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ 。試選出正確的選項。  
 (1)  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  必不平行 (2)  $\vec{a}$  與  $\vec{c}$  必不平行 (3)  $\vec{a} + \vec{b}$  與  $\vec{c} - \vec{d}$  垂直  
 (4) 若將點  $A$  以  $O$  為中心旋轉有向角  $\theta$  至點  $C$ ，則點  $B$  以  $O$  為中心旋轉  $\theta$  角至點  $D$   
 (5) 若將點  $A$  以過原點  $O$  的直線  $L$  為鏡射軸鏡射至點  $B$ ，則點  $C$  以  $L$  為鏡射軸會鏡射至點  $D$
12. 已知有一正四面體  $A-BCD$ ，如示意圖，其中平面  $BCD$  平貼於地面，今太陽光(平行光)垂直照射平面  $ABC$ ，若太陽光將點  $A$  照射在平面  $BCD$  的影子為點  $A'$ 。試選出正確的選項。(1) 直線  $AA'$  垂直平面  $ABC$   
 (2) 點  $A'$  在  $\triangle BCD$  的內部

(3) 設平面  $AA'B$  與平面  $AA'C$  的兩面角為  $\alpha$ ，則  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

(4) 設太陽光與平面  $BCD$  的銳夾角為  $\beta$ ，則  $\sin \beta = \frac{1}{3}$

(5)  $\Delta A'BC$  的面積為  $\Delta ABC$  面積的 3 倍



### 三、選填題(占 25 分)

13. 棒球投手大古和打擊手翔評哪一位比較厲害，常是人們茶餘飯後的話題。已知大古投球時可將球投進好球帶及沒有投進好球帶兩種結果，翔評擊球時可將球擊出安打、被接殺、及揮棒落空三種結果，今由電腦大數據分析，翔評擊出安打、被接殺、及揮棒落空的機率分別為 0.2、0.4、0.4，已知翔評擊出安打、被接殺、及揮棒落空的條件下，大古能將球投進好球帶的機率分別為 0.9、0.5、0.3，今大古投一球，已知大古沒有將球投進好球帶，則此時被翔評擊出安打的機率為\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

14. 設  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  是一個沒有反方陣的二階轉移矩陣，且  $A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，

則  $d$  為\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

15. 學校請甲、乙、丙三位同學投票選擇高三畢旅地點，其中城市地點有  $A, B$  兩個，遊樂園地點有  $C, D$  兩個，若要求每位同學從中選擇兩個不同的地點，且城市地點至少選一個，則此三位同學至少有一個相同的選擇地點(例如：甲、乙、丙皆有選  $A$ ，投票結果為甲選  $A, B$ ，乙選  $A, C$ ，丙選  $A, D$ )的機率為\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

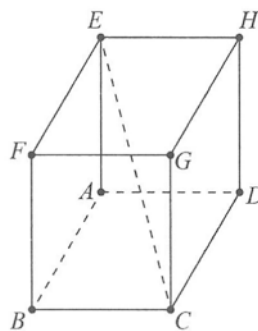
16. 坐標平面上有直線  $L$ ，已知  $A(1,1)$  到直線  $L$  的距離為 2， $B(8,0)$  到直線  $L$  的距離為 7，則滿足上述條件中斜率最小的直線  $L$  方程式為\_\_\_\_\_。

17.  $\Delta ABC$  中， $\overline{BC} = 14$ ，點  $M$  是  $\overline{BC}$  的中點， $\angle BAM = 120^\circ$  且  $\angle CAM = 30^\circ$ ，則  $\Delta ABC$  面積為\_\_\_\_\_。(化成最簡根式)

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

#### 第 18 至 20 題為題組

如圖，已知長方體  $ABCD - EFGH$ ，試回答下列問題：



18. 試問哪一個平面包含直線  $CE$  並與直線  $AB$  平行？(單選題，3 分)

- (1) 平面  $ACGE$     (2) 平面  $CDHG$     (3) 平面  $CDEF$   
 (4) 平面  $BCHE$     (5) 平面  $ABGH$

19. 若  $\overline{AB} = a$ ， $\overline{AD} = b$ ， $\overline{AE} = c$ ，試求直線  $CE$  與直線  $AB$  的距離。(以  $a, b, c$  表示)  
 (非選擇題，6 分)

20. 若直線  $CE$  與直線  $AB$  的距離為  $\frac{8}{\sqrt{5}}$ ，且直線  $CE$  與直線  $AD$  的距離為  $\frac{16}{\sqrt{17}}$ ，且直線  $CE$  與直線  $BF$  的距離為  $\frac{16}{\sqrt{5}}$ ，試求長方體  $ABCD - EFGH$  的體積。(非選擇題，6 分)

RA4104 全國公私立高中 112 學年度第四次學測模擬考(數 A)

參考答案

選擇題：1. (5) 2. (3) 3. (2) 4. (1) 5. (4) 6. (4) 7. (1)(3)(4)(5) 8. (1)(4)(5) 9. (2)(4)(5)

10. (1)(3)(4)(5) 11. (1)(3)(5) 12. (1)(4)(5)

選填題：13.  $\frac{1}{25}$  14.  $\frac{3}{4}$  15.  $\frac{13}{25}$  16.  $4x+3y+3=0$  17.  $7\sqrt{3}$

混合題：18. (3) 19.  $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$  20. 512