全國公私立高級中學 112 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學 A 考科解析

考試日期：112 年 12 月 12~13 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
5	3	2	1	4	4	1345	145	245	1345	135	145	1	2	5
14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	15-4	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19	20		
3	4	1	3	2	5	4	3	7	3	3				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. $2\{3\}3=2^{2\{2\}3}=2^{2^{2\{1\}3}}=2^{2^8}=2^{256}$

$\log 2^{256}=256\log 2\approx 77.056$，

所以數字 $2\{3\}3$ 為 78 位數，

故選(5)。

2. <法一>

可觀察出正午 12 點 A 欄有 13 種品項可選，B 欄有 9 種品項可選，且 A、B 欄有 6 種相同品項，

由 A、B 欄的相同品項中分別選擇相異的品項皆視為相同的商品組合，其餘皆為不同的商品組合，

所以可知不同的商品組合數量有 $13\times 9-C_2^6=102$ 個，

故選(3)。

<法二>

將 A 欄商品分割成兩個集合 A_1, A_2，

其中 A_1 為 A、B 欄相同的 6 種品項，剩下為 A_2 的 7 種品項，

同理，將 B 欄商品分割成兩個集合 B_1, B_2，

其中 B_1 為 A、B 欄相同的 6 種品項，剩下為 B_2 的 3 種品項，

可知不同的商品組合數量為

$|A_1|\times|B_2|+|A_2|\times|B_1|+|A_1|\times|B_2|$

$+(A_1, B_1$ 中不同的商品組合數量$)$，

所以可知數量有 $6\times 3+7\times 6+7\times 3+(C_1^6+C_2^6)=102$ 個，

故選(3)。

3. <法一>

觀察規律可得 $c_{n+1}=c_n+4n+4,\ n\in N$

$$\begin{aligned}
c_2&=c_1+8\\
c_3&=c_2+12\\
&\ \ \vdots\\
+)\ c_n&=c_{n-1}+4n\\
\hline
c_n&=c_1+8+12+\cdots+4n=2n^2+2n+1
\end{aligned}$$

故 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{10}$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)+2(1+2+3+\cdots+10)+10$

$=890$，

故選(2)。

<法二>

$a_n=2n+1,\ n\in N$，

$b_n=4(1+2+\cdots+n)=2n(n+1),\ n\in N$，

可得 $c_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}=\sqrt{(2n+1)^2+(2n(n+1))^2}$

$=2n^2+2n+1,\ n\in N$，

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{10}$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)+2(1+2+3+\cdots+10)+10$

$=890$，

故選(2)。

4. <法一>

① 當 $x\ge a$ 時，

$3(x-a)-x\le a\Rightarrow x\le 2a$ 整理得 $a\le x\le 2a$

② 當 $x<a$ 時，

$-3(x-a)-x\le a\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}a$ 整理得 $\frac{1}{2}a\le x<a$

由①②可得解為 $\frac{1}{2}a\le x\le 2a$，可得 $\frac{1}{2}a=7\Rightarrow a=14$，

故選(1)。

<法二>

原不等式可改寫為 $3|x-a|\le x+a$，且 $0\le 3|x-a|\le x+a$，

所以 $3|x-a|\le|x+a|=|x-(-a)|$，

由幾何意義可知：

數線上 x 到 $-a$ 的距離 $\ge x$ 到 a 的距離的 3 倍，

即 x 會落在數線上 $-a$ 與 a 的 3：1 的內分點及外分點之間，

即 $\frac{1}{2}a\le x\le 2a$，可得 $\frac{1}{2}a=7\Rightarrow a=14$，

故選(1)。

5. <法一>

由題意可知 $P\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 及 $P\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，

故 $P\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}P\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$。

取直線 L 上兩點 $(1,1)$、$(4,-1)$ 經過 P^{-1} 變換後可得 $(4,6)$、$(11,14)$，直線 L' 斜率為 $\frac{8}{7}$，

故選(4)。

<法二>

$\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+3t\\1-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+7t\\6+8t\end{bmatrix}$，直線 L' 斜率為 $\frac{8}{7}$，

故選(4)。

6. (1) ×：$(a+\frac{4}{a})(b+\frac{9}{b})\ge(2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}})(2\sqrt{b\cdot\frac{9}{b}})=2\sqrt{4}\cdot 2\sqrt{9}=24$，

等號成立時 $a=2$，$b=3$ 不符合題意 $a>b$，

故 $(a+\frac{4}{a})(b+\frac{9}{b})>24$。

(2) ×：$(a+\frac{9}{b})(\frac{4}{a}+b)=13+ab+\frac{36}{ab}\ge 13+2\sqrt{36}=25$，

等號成立時 $ab=6$，故 $(a+\frac{9}{b})(\frac{4}{a}+b)\ge 25$。

(3) ×：$(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{9}{b})=13+\frac{9a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 13+2\sqrt{36}=25$，

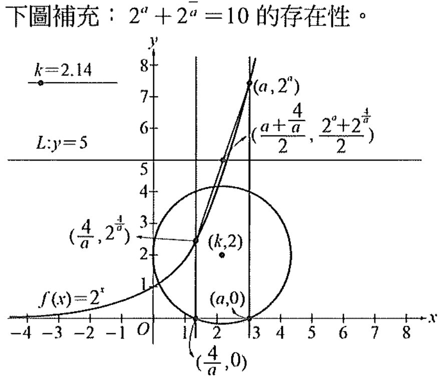
等號成立時 $\frac{9a}{b}=\frac{4b}{a}\Rightarrow a=\frac{2b}{3}$ 不符合題意 $a>b$，

故 $(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{9}{b})>25$。

(4) ○：$2^a+2^{\frac{4}{a}}\ge 2\sqrt{2^a\cdot 2^{\frac{4}{a}}}=2\sqrt{2^{a+\frac{4}{a}}}\ge 2\sqrt{2^{2\sqrt{4}}}=8$，

等號成立時 $a=2$，故 $2^a+2^{\frac{4}{a}}\ge 8$。

下圖補充：$2^a+2^{\frac{4}{a}}=10$ 的存在性。



(5) ×：原式$=(\log_3 b)(2-\log_3 b)=2$
$\Rightarrow(\log_3 b)^2-2(\log_3 b)+2=0$，
此方程式無解。

故選(4)。

二、多選題

7. (1) ○：$\mu_y=9-2\mu_x=3$。

(2) ×：$\sigma_y=|-2|\sigma_x=5$。

(3) ○：令 $a_i=4x_i-3$，$b_i=5-2y_i$，則 $a_i, b_i\ (i=1\sim10)$ 的相關係數為 $-r_{xy}=-(-1)=1$。

(4) ○：已知 $r_{x'y'}=r_{xy}=-1$，則點 $(x_i', y_i')\ (i=1\sim10)$ 均會落在直線 $y'=r_{x'y'}x'$ 上，即 $y'=-x'$。

(5) ○：加新數據 (μ_x, μ_y) 後，新資料的算術平均數依然為 μ_x 及 μ_y，且新資料的迴歸直線斜率依然不變，故加入新資料後 y 對 x 的迴歸直線依然不變。

故選(1)(3)(4)(5)。

8. 令 $f(x+2)=k(x+4)(x+1)(x-2)$，$k>0$，
$x=-2$ 代入左式即可得 $16=k\times2\times(-1)\times(-4)\Rightarrow k=2$
所以 $f(x+2)=2(x+4)(x+1)(x-2)$
$\Rightarrow f(x)=2(x+2)(x-1)(x-4)$

(1) ○：正確。

(2) ×：$f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 $f(3)=-20$。

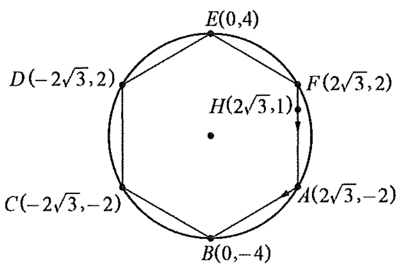
(3) ×：$f(x)=2(x-1)^3-18(x-1)$
經適當平移後與 $y=2x^3-18x$ 的圖形重合。

(4) ○：$f(x)=2(x-1)^3-18(x-1)$
在對稱中心附近的一次近似直線斜率為 -18。

(5) ○：$(x+2)f(x)\le0\Rightarrow2(x+2)^2(x-1)(x-4)\le0$
$\Rightarrow1\le x\le4$ 或 $x=-2$，整數解共 5 個。

故選(1)(4)(5)。

9.



(1) ×：點 A 極坐標為 $\left[4,-\dfrac{\pi}{6}\right]$。

(2) ○：$\triangle HDE$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{ED}\\\overrightarrow{EH}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2\sqrt{3} & -2\\2\sqrt{3} & -3\end{vmatrix}\right|=5\sqrt{3}$。

(3) ×：$4-\sqrt{13}\le$ 圓上的點與 H 點之距離 $\le4+\sqrt{13}$，
共 14 個。

(4) ○：$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HF}=(-2\sqrt{3},-5)\cdot(0,1)=-5$。

(5) ○：$(-2\sqrt{3},-5)=\alpha(0,-3)+\beta(-4\sqrt{3},1)$
$\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=\dfrac{11}{6}$，故 $\alpha+\beta=\dfrac{7}{3}$。

故選(2)(4)(5)。

10. $f(x)=\cos2x-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\cos2x-\left(\cos2x\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin2x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

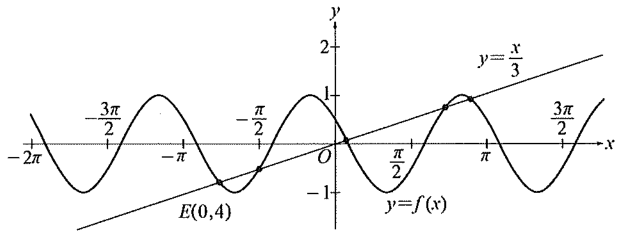
$=\dfrac{1}{2}\cos2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1) ○：正確。

(2) ×：$x=\dfrac{\pi}{6}$ 非對稱軸。

(3) ○：$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ 在區間 $[0,2\pi)$ 的解為
$0,\dfrac{2}{3}\pi,\pi,\dfrac{5}{3}\pi$，和為 $\dfrac{10}{3}\pi$。

(4) ○：$\begin{cases}y=f(x)\\y=\dfrac{x}{3}\end{cases}$ 如下圖可知有 5 個實根。



(5) ○：$y=2\sin^2x=1-\cos2x\xrightarrow[\text{下移}1]{\text{左移}\frac{\pi}{2}}y=\cos2x$

$\xrightarrow{\text{左移}\frac{\pi}{6}}y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，得到 $y=f(x)$。

故選(1)(3)(4)(5)。

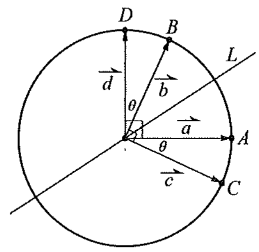
11. (1) ○：若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=t\overrightarrow{b}$，$t\in R$，$t\neq0$
代入 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$ 不合題意，
故 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 必不平行。

(2) ×：若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}$ 亦符合題意，如圖(c)與圖(f)。

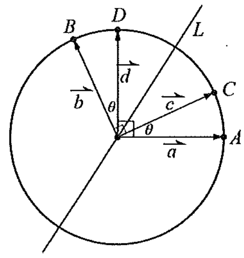
(3) ○：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}=0$，
且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}\neq\overrightarrow{0}$，
故 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})$。

(4) ×：如圖(a)、圖(b)及圖(c)。
將點 A 以 O 為中心旋轉有向角 θ 至點 C，
則點 B 以 O 為中心會旋轉 $-\theta$ 角至點 D。

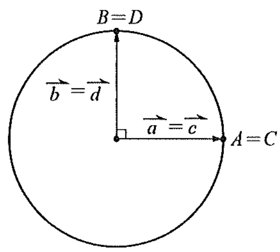
(5) ○：如圖(a)～圖(f)，不失一般性，
可先固定 $\overrightarrow{a}=(1,0)$，則 $\overrightarrow{d}=(0,1)$ 或 $(0,-1)$，
而 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 的各種情形，如圖(a)～圖(f)。



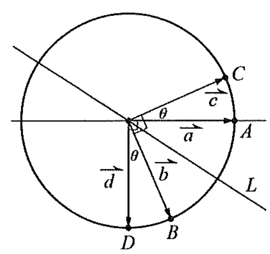
圖(a)



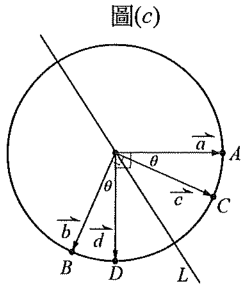
圖(b)



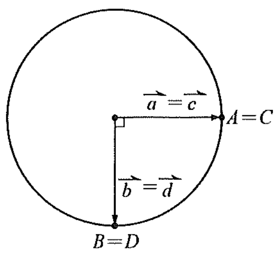
圖(c)



圖(d)



圖(e)



圖(f)

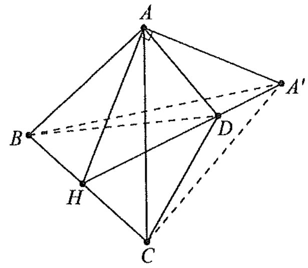
故選(1)(3)(5)。

12. <法一>

(1) ○：正確。

(2) ×：令 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 H，因為直線 AA' 垂直平面 ABC，
由三垂線定理可知直線 $A'H$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 H，
所以 A', D, H 三點共線，且因為 $\angle DAH$ 為銳角，
$\angle A'AH$ 為直角，所以點 A' 會在 $\overline{DH}$ 外，
即點 A' 在 $\triangle BCD$ 的外部。

(3) ×：因為直線 AA' 垂直平面 ABC，
所以直線 AA' 會垂直 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$，
即平面 $AA'B$ 與平面 $AA'C$ 的兩面角 $\alpha=\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，
所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。



(4) ○：已知 $\angle AHD$ 為正四面體的兩面角，
而太陽光與平面 BCD 的銳夾角 β 即為 $\angle AA'H$，
且 $\angle AHD+\angle AA'H=\dfrac{\pi}{2}$，
所以 $\sin\beta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle AHD\right)=\cos\angle AHD=\dfrac{1}{3}$。

(5) ○：$\triangle A'BC$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比 $=\overline{A'H}:\overline{AH}=3:1$。
故選(1)(4)(5)。

<法二>

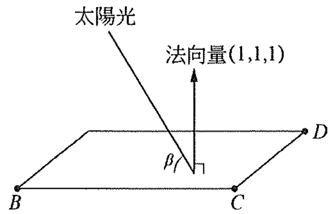
坐標化，令 $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,1)$

(1) ○：正確。

(2) ×：太陽光平行 $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)$ 且平面 BCD
方程式為 $x+y+z=2$，令 $A'(t,-t,-t)$ 代入
平面 BCD 方程式得 $t=-2$ 得 $A'(-2,2,2)$，
可知點 A' 不在 $\triangle BCD$ 的內部。

(3) ×：平面 $AA'B$ 方程式為 $x+2y-z=0$ 且平面 $AA'C$ 方程式為 $x-y+2z=0$，
$\cos\alpha=\pm\dfrac{(1,2,-1)\cdot(1,-1,2)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\pm\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(4) ○：略圖如下，
$\cos(90^\circ-\beta)=\dfrac{|(1,1,1)\cdot(1,-1,-1)|}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{1}{3}$。



(5) ○：$\triangle A'BC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{A'B}\times\overrightarrow{A'C}|=\dfrac{1}{2}|(3,3,3)|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
為 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|(-1,1,1)|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
的 3 倍。

故選(1)(4)(5)。

三、選填題

13. 令翔評打安打的事件為 A_1、被接殺的事件為 A_2、揮棒落空的事件為 A_3，
大古能將球投進好球帶的事件為 B_1、沒有將球投進好球帶的事件為 B_2，
則大古沒有將球投進好球帶的條件下，被翔評打安打的機率
為 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1\cap B_2)}{P(B_2)}$

$$=\frac{P(A_1\cap B_2)}{P(A_1\cap B_2)+P(A_2\cap B_2)+P(A_3\cap B_2)}$$

$$=\frac{P(A_1)\times P(B_2|A_1)}{P(A_1)\times P(B_2|A_1)+P(A_2)\times P(B_2|A_2)+P(A_3)\times P(B_2|A_3)}$$

$$=\frac{0.2\times(1-0.9)}{0.2\times(1-0.9)+0.4\times(1-0.5)+0.4\times(1-0.3)}=\frac{1}{25}\text{。}$$

14. 因為矩陣 A 是二階轉移矩陣，可令 $A=\begin{bmatrix}1-c & 1-d\\ c & d\end{bmatrix}$，
因為矩陣 A 沒有反方陣即 $\det A=0$，
所以 $\det\left(\begin{bmatrix}1-c & 1-d\\ c & d\end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow c=d$，
因此矩陣 $A=\begin{bmatrix}1-d & 1-d\\ d & d\end{bmatrix}$，已知 $A+A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1-d & 1-d\\ d & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-d & 1-d\\ d & d\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1-d & 1-d\\ d & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

得 $d=\dfrac{3}{4}$。

15. 每位同學選法都有 5 種，
情形 1：三人兩個選擇地點全部都相同，則方法數有 5 種。
情形 2：恰 2 人兩個選擇地點全部都相同，另 1 人與其他兩人只有一個選擇地點相同，則方法數有

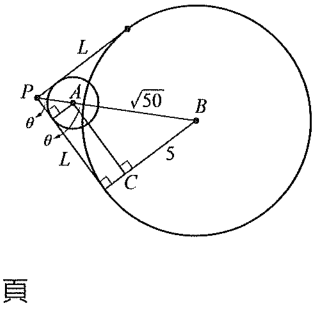
$$\underbrace{C^3_2}_{\text{三人選兩人全部地點相同}}\times(\underbrace{1}_{\text{全部相同地點兩人選}A,B}\times\underbrace{4}_{\text{另1人選擇方法數}}+\underbrace{4}_{\text{全部相同地點兩人不選}A,B}\times\underbrace{3}_{\text{另1人選擇方法數}})=48\text{ 種。}$$

情形 3：三人恰只有一個選擇地點相同（可知相同的選擇地點必為城市地點），則方法數有

$$\underbrace{C^2_1}_{\text{三人相同的城市地點}}\times\underbrace{3!}_{\text{三人另一個不同的選擇地點}}=12\text{ 種。}$$

3 種情形合計共 65 種，故機率為 $\dfrac{65}{125}=\dfrac{13}{25}$。

16. <法一>
所求即為兩圓之斜率最小的公切線 L，
如下圖，令公切線 L 的交點為 P，因為 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:7$，
由分點公式可得到 $P\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{7}{5}\right)$，
令公切線方程式 L：$y-\dfrac{7}{5}=m\left(x+\dfrac{9}{5}\right)$，
則 $d(A,L)=\dfrac{\left|\dfrac{14}{5}m+\dfrac{2}{5}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{-4}{3}$，
故所求為 $4x+3y+3=0$。



＜法二＞

參考法一圖，已知直線 AB 斜率為 $m=\frac{-1}{7}$，

直線 PA 與 L 之銳夾角為 $\theta=\frac{\pi}{4}$，且令直線 L 斜率為 m_L，

則 $\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-m_L}{1+m\cdot m_L}\right|=1\Rightarrow\left|\frac{-\frac{1}{7}-m_L}{1+(-\frac{1}{7})m_L}\right|=1\Rightarrow m_L=\frac{3}{4}$ 或 $\frac{-4}{3}$，

故所求為 $4x+3y+3=0$。

17. ＜法一＞

定坐標如下圖所示，令 A 為原點，$\overline{AC}=2t$。

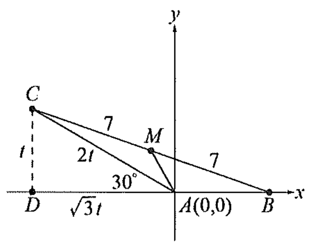
可知$\triangle ACM$ 面積等於$\triangle ABM$ 面積，

故 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AM}\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\sin 120^\circ\Rightarrow\overline{AB}=\frac{2t}{\sqrt{3}}$，

再用餘弦定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 150^\circ$，

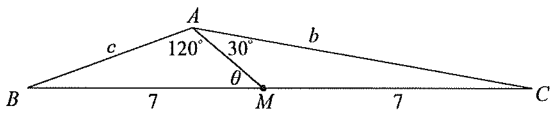
即 $14^2=(2t)^2+(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2-2\times(2t)\times(\frac{2t}{\sqrt{3}})\times\cos 150^\circ\Rightarrow t=\sqrt{21}$，

故$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 150^\circ=7\sqrt{3}$。



＜法二＞

令 $\angle AMB=\theta$，如下圖，利用正弦定理



$\frac{b}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{7}{\sin 30^\circ}\Rightarrow b=\frac{7}{\sin 30^\circ}\times\sin\theta$

與 $\frac{c}{\sin\theta}=\frac{7}{\sin 120^\circ}\Rightarrow c=\frac{7}{\sin 120^\circ}\times\sin\theta$

可得到 $b:c=\sqrt{3}:1\Rightarrow b=\sqrt{3}c$，

再用餘弦定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 150^\circ$，

即 $14^2=c^2+(\sqrt{3}c)^2-2\times c\times(\sqrt{3}c)\times\cos 150^\circ\Rightarrow c^2=28$，

故$\triangle ABC$ 面積為

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}c^2\times\sin 150^\circ=7\sqrt{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 平面 $CDEF$ 包含直線 CE 並與直線 AB 平行，

僅有(3)符合，其他選項皆不合。

故選(3)。

19. ＜法一＞

承 18 可知直線 AB 平行平面 $CDEF$，

故所求為 B 點到直線 CF 的距離，(2 分)

即為$\triangle BCF$ 中以線段 CF 為底的高

$\frac{\overline{BF}\times\overline{BC}}{\overline{FC}}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$。(4 分)

＜法二＞

令 A 為原點且以射線 $\overrightarrow{AB}$ 為正 x 軸，射線 $\overrightarrow{AD}$ 為正 y 軸，

射線 $\overrightarrow{AE}$ 為正 z 軸，

故 $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,b,0)$, $D(0,b,0)$,

$E(0,0,c)$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，(2 分)

又 $\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CE}=(0,ac,ab)$，

故平面 $CDEF$ 方程式為 $(ac)y+(ab)z=abc$，(2 分)

此時 B 點到平面 $CDEF$ 的距離為

$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$。(2 分)

20. 承 19 可知，直線 CE 與直線 AB 的距離為 $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$，

直線 CE 與直線 AD 的距離為 $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{16}{\sqrt{17}}$，

直線 CE 與直線 BF 的距離為 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{16}{\sqrt{5}}$，

$\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}=\frac{64}{5}$

$\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{5}{64}\Rightarrow\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{5}{64}$ ……①，(1 分)

$\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{16}{\sqrt{17}}\Rightarrow\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}=\frac{256}{17}$

$\Rightarrow\frac{a^2+c^2}{a^2c^2}=\frac{17}{256}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{17}{256}$ ……②，(1 分)

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{16}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{256}{5}$

$\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{5}{256}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{5}{256}$ ……③，(1 分)

$\frac{1}{2}$ (①+②+③) 得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{21}{256}$，

得 $a=16$，$b=8$，$c=4$，

故長方體 $ABCD-EFGH$ 體積為 512。(3 分)