臺北區 112 學年度第一學期第一次學測模擬考數學 A(112-B1)

第壹部分：選擇題(占 85 分)

RA4105

一、單選題(占 30 分)

1. 已知$\langle a_n \rangle$為公差不為 0 的等差數列、$\langle b_n \rangle$為公比不為 1 的等比數列，且$a_n > 0, b_n > 0$，其中 n 為任意正整數，則下列各數列，有幾個是等差數列？

$$\langle 2a_n + 3 \rangle \text{，} \langle 4^{a_n} \rangle \text{，} \langle \log a_n \rangle \text{，} \langle \log b_n \rangle \text{，} \left\langle \frac{b_{n+1}}{b_n} \right\rangle$$

(1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個

2. 考慮函數 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos x$，其中$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{4\pi}{3}$，若 $f(x)$ 的最大值為m，最小值為 n，則數對(m, n)為下列何者？(1)$(2,-1)$　(2)$(2,-\sqrt{3})$　(3)$(2,\sqrt{3})$　(4)$(\sqrt{3},-1)$　(5)$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$

3. 設 $f(x)$ 是一個二次函數，已知$(x+4)f(x-1) = x^2 + x + xf(x)$，則 $f(1) = ?$
(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) 2　(5) 3

4. 蒐集數據資料時，有時會出現與其他數據有較大差異的數值，統計學上稱這樣的數值為極端值，又稱為離群值(outlier)。極端值有時會嚴重影響許多統計值，使結果有所誤差。判斷極端值的方式有許多學者提出不同說法，其中有一種是：「先將數據標準化後，將數值大於3或小於－3的數據視為極端值。」
下表為某餐廳過去20週漢堡的銷售量(單位：個)：

週次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
銷售量	27	42	57	0	72	22	102	49	17	201
週次	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
銷售量	283	26	12	63	21	51	32	390	20	113

已知蟹老闆想透過上表數據做出漢堡銷售對策，他希望可以找到極端值並考慮刪除，請問：若使用上述的方式判斷極端值，這20週中大約有多少筆極端值？
(已知過去20週漢堡的平均銷售量μ＝80個，標準差σ近似於100個)
(1) 0筆　(2) 1筆　(3) 2筆　(4) 3筆　(5) 4筆

5. 設坐標空間中由三向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$所決定的平行六面體，其體積為10，已知$A(0, 0, 0)$，$B(2, 1, -2)$，$C(1, 3, 1)$，$D(a, b, c)$，則下列選項何者正確？

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 10$　(2) $7a - 4b + 5c = -10$　(3) 點(3, 4, 1)在平面ABC上

(4) 此平行六面體的其中一面可能落在平面$7x-4y+5z=\pm 10$上

(5) 直線$\frac{x}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{5}$與平面$ABC$平行

二、多選題(占 30 分)

6. 已知兩實係數方程式Γ：$x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 5m - 2 = 0$，$L$：$3x - 4y + 10 = 0$，試選出正確的選項。　(1) 不論 m 為任何實數，方程式Γ的圖形恆為一圓
(2) 方程式Γ的圖形之最小面積為$\frac{3\pi}{4}$　(3) 不論 m 為任何實數，方程式Γ與 L 的圖形恆有兩個交點　(4) 方程式Γ與 L 的圖形可能恰交於一點　(5) 方程式 L 的圖形被方程式Γ的圖形所截出的線段有最大長度

7. 設坐標空間中有兩條相異直線 L_1 、 L_2 ，已知 $L_1:\begin{cases}ax+by+cz=0\\dx+ey+fz=0\end{cases}$ ， $L_2:\begin{cases}ax+by+cz=m\\dx+ey+fz=n\end{cases}$

其中 m，n 均為非零實數，且 a，b，c，d，e，f 均為實數，試選出正確的選項。

(1) 原點(0, 0, 0)必在 L_1 上　(2) 向量(a, b, c)與向量(d, e, f)可能平行

(3) 向量(a, b, c)與向量(d, e, f)可能垂直　(4) 直線 L_1 與直線 L_2 平行

(5) 若已知 L_1 上有一點 $A(6, 1, 4)$， L_2 上有一點 $B(1, 0, 6)$，則點 $C(-2, 0, 8)$必也在 L_2 上

8. 已知實係數三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，其中 $a>0$ ，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為 $3x+1$。試選出正確的選項。　(1) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為(1,1)

(2) $f(-3-\pi)+f(5+\pi)=8$　(3) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸不可能會有 3 個交點

(4) $y=f(x)$ 在對稱中心附近的一次近似為 $y=3(x-1)$

(5) $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=5x-1$ 恰有 1 個交點

9. 設坐標平面上有一個線性變換的二階方陣 A，且 $A^8=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$。試選出可能是 A 的選項。

(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}\cos 22.5^\circ&-\sin 22.5^\circ\\\sin 22.5^\circ&\cos 22.5^\circ\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}\cos 240^\circ&-\sin 240^\circ\\\sin 240^\circ&\cos 240^\circ\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

10. 已知△ABC 為銳角三角形，試選出正確的選項。

(1) $\sin A+\sin B<\sin C$　(2) $1+\cos^2 C>\cos^2 A+\cos^2 B$　(3) $1+\cos 2C>\cos 2A+\cos 2B$

(4) $\sin A>\cos B$　(5) $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$

11. 某 AI 人臉辨識系統進行人臉辨識的正確率為 90%，且每次的辨識結果互不影響。現將 AI 人臉辨識系統安裝在置物櫃內有的開關上，置物櫃編號 A、B、C 共三個櫃子，分別為 Selina、Hebe、Ella 所有。她們三人長得特別像，經統計，若 AI 人臉辨識系統見到 Selina 時，有 90%的機率會打開編號 A 的置物櫃，打開另兩個置物櫃的機率分別為 5%，而其餘兩人利用人臉辨識系統去開置物櫃時，也有 90%的機率會打開自己的置物櫃，打開另兩個置物櫃的機率亦分別為 5%。今擲一顆公正的骰子從三人中選一人用 AI 人臉辨識系統去開置物櫃，擲出一、二、三點選 Selina，擲出四、五點選 Hebe，擲出六點選 Ella。試選出正確的選項。

(1) 選到 Selina 去開置物櫃的機率為 $\frac{1}{3}$　(2) 編號 A 的置物櫃被打開的機率為 $\frac{9}{20}$

(3) 已知選到 Selina 去開置物櫃，則編號 A 的置物櫃被打開的機率為 $\frac{9}{10}$

(4) 已知編號 A 的置物櫃被打開，則是選到 Selina 去開置物櫃的機率為 $\frac{18}{19}$

(5) 各置物櫃被打開的機率以編號 C 為最高

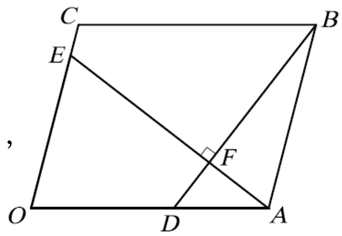
三、選填題(占 30 分)

12. 已知平面上一動點 $P(a, b)$位於第一象限，且滿足 $ab=\dfrac{25}{6}$。則點 $P(a, b)$到直線 L：$2x+3y+3=0$ 的最短距離為＿＿＿＿＿。(化為最簡根式)

13. 已知實數 $a>1$，正方形 $ABCD$ 的面積為 16，其中 $\overline{AB}$ 與 y 軸平行，且 A、B、C 分別為函數 $y=a^x$，$y=2a^x$，$y=3a^x$ 圖形上的點，則 $a^2=$＿＿＿＿＿。(化為最簡根式)

14. 2023 年的杭州亞運「男籃 3 對 3」項目中，中華隊逆轉強敵卡達隊摘下金牌。已知訓練期間中華籃球協會選出共 8 位頂尖的籃球員平分為兩隊，每隊 4 人，來進行分組對抗賽，同時每隊須選出一人擔任隊長。則由此 8 位籃球員平分成兩隊、並選出隊長的方法數共有＿＿＿＿＿種。

15. 如右圖，四邊形 $OABC$ 為一平行四邊形。已知 $\overline{OA}=5, \overline{OC}=4$，$\cos\angle AOC=\dfrac{1}{4}$，$\overline{OA}$ 邊上取一點 D，使得 $\overline{OD}=3$，並連接 $\overline{BD}$。若過 A 點對 $\overline{BD}$ 作垂線交 $\overline{BD}$ 於 F 點，並延長 $\overline{AF}$ 交 $\overline{OC}$ 於 E 點，則 $\overline{OE}$ 長度為＿＿＿＿＿。(化為最簡分數)



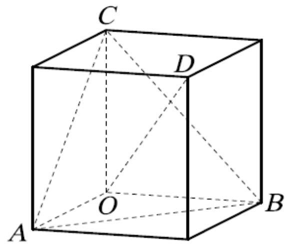
16. 在$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=12, \overline{AC}=4$ 且 $\cos(A-B)=-\dfrac{1}{5}$，則 $\overline{AB}=$＿＿＿＿＿。(化為最簡根式)

17. 設 a、b 皆為實數，則 $a^2+b^2+(2-3a-4b)^2$ 的最小值為＿＿＿＿＿。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

如右圖，$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 為長方體的三邊，D 為離 O 最遠的頂點，設 $\overline{BC}=m$、$\overline{AC}=n$、$\overline{OD}=\ell$，試回答下列問題：



18. 若以 m、n、ℓ 表示 $\overline{AB}$ 的長度，則 $\overline{AB}$ ＝？(單選題，5 分)

(1) $\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+\ell^2}{2}}$　(2) $\sqrt{\dfrac{\ell^2-m^2-n^2}{2}}$　(3) $\sqrt{2\ell^2+m^2+n^2}$

(4) $\sqrt{2\ell^2-m^2-n^2}$　(5) $\sqrt{2\ell^2-m^2+n^2}$

19. 承第 18.題，若 $m=5$、$n=13$，則 ℓ 的範圍為＿＿＿＿＿。(選填題，5 分)

20. 若將此長方體放置在坐標空間中，O 為原點，D 在 z 軸正向上，C 在 xy 平面上的投影點剛好落在 x 軸正向上。已知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \overline{OC}=\sqrt{6}$，則 C 點的坐標為何？

(非選擇題，5 分)

RA4105　臺北區 112 學年度第一學期第一次學測模擬考
數學 A(112-B1)

參考答案

選擇題：**1.** (3)　**2.** (1)　**3.** (5)　**4.** (2)　**5.** (4)　**6.** (1)(2)(4)　**7.** (1)(3)(4)　**8.** (2)(3)　**9.** (1)(3)(5)
10. (2)(3)(4)(5)　**11.** (3)(4)

選填題：**12.** $\sqrt{13}$　**13.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$　**14.** 560　**15.** $\frac{10}{3}$　**16.** $\frac{8\sqrt{70}}{7}$　**17.** $\frac{2}{13}$

混合題：**18.** (4)　**19.** $13 < \ell < \sqrt{194}$　**20.** $(\sqrt{2},0,2)$