# 數學 A 考科詳解

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (1) | (5) | (2) | (4) | (1)(2)(4) | (1)(3)(4) |
| 8. | 9. | 10. | 11. | | | |
| (2)(3) | (1)(3)(5) | (2)(3)(4)(5) | (3)(4) | | | |

**第壹部分、選擇（填）題**

**一、單選題**

1. (3)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：等差數列的定義

解析：設〈$a_n$〉的公差為 $d$，〈$b_n$〉的公比為 $r$

因為 $(2a_{n+1}+3)-(2a_n+3)=2(a_{n+1}-a_n)=2d$ 是定值，

所以〈$2a_n+3$〉為等差數列

因為 $4^{a_{n+1}}-4^{a_n}=4^{a_n+d}-4^{a_n}=4^{a_n}(4^d-1)$ 不是定值，

所以〈$4^{a_n}$〉不為等差數列

因為 $\log a_{n+1}-\log a_n=\log\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不是定值，

所以〈$\log a_n$〉不為等差數列

因為 $\log b_{n+1}-\log b_n=\log\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\log r$ 是定值，

所以〈$\log b_n$〉為等差數列

因為 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r$ 是定值，所以 $\left\langle\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right\rangle$ 為等差數列

由上述討論可知，〈$2a_n+3$〉，〈$\log b_n$〉，$\left\langle\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right\rangle$ 是等差數列，共 3 個，故選(3)。

2. (1)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合

解析：
$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos x\\&=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-2\cos x\\&=\sqrt{3}\sin x-\cos x\\&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)\\&=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$\because \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{4\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\le x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore$ 當 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值為 2

當 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $2\sin\dfrac{7\pi}{6}=-1$

故數對 $(m,n)=(2,-1)$，故選(1)。

3. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：等式的平衡與二次函數的性質

解析：$x=-4$ 代入得 $0=16-4-4f(-4)\Rightarrow f(-4)=3$

$x=0$ 代入得 $4f(-1)=0\Rightarrow f(-1)=0$

$x=-1$ 代入得 $3f(-2)=1-1-f(-1)=0\Rightarrow f(-2)=0$

故可設 $f(x)=a(x+1)(x+2)$

$f(-4)=a\cdot(-3)\cdot(-2)=3\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)(x+2)$

故 $f(1)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$

故選(5)。

4. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：標準化數據的計算與應用

解析：已知過去 20 週漢堡的平均銷售量 $\mu=80$ 個，標準差 $\sigma$ 近似於 100 個，則將銷售量標準化如下表：

| 週次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 銷售量 | 27 | 42 | 57 | 0 | 72 |
| 標準化數據 | −0.53 | −0.38 | −0.23 | −0.8 | −0.08 |
| 週次 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 銷售量 | 22 | 102 | 49 | 17 | 201 |
| 標準化數據 | −0.58 | 0.22 | −0.31 | −0.63 | 1.21 |
| 週次 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 銷售量 | 283 | 26 | 12 | 63 | 21 |
| 標準化數據 | 2.03 | −0.54 | −0.68 | −0.17 | −0.59 |
| 週次 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 銷售量 | 51 | 32 | 390 | 20 | 113 |
| 標準化數據 | −0.29 | −0.48 | 3.1 | −0.6 | 0.33 |

僅有第 18 週的標準化數據 $3.1>3$，即只有 1 筆數據為極端值，故選(2)。

〔另解〕

設銷售量為 $x$，則 $\left|\dfrac{x-80}{100}\right|>3$

$\Rightarrow x>380$ 或 $x<-220$

∴找出區間外的值只有 1 筆

故選(2)。

5. (4)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：利用三階行列式求平行六面體體積，熟悉外積的運算並求得空間中的平面方程式

解析：(1)(2)╳：由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 所決定的平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&3&1\\a&b&c\end{vmatrix}\right|=10$

$\Rightarrow|7a-4b+5c|=10$

$\Rightarrow 7a-4b+5c=\pm10$

(3)╳：平面 $ABC$ 的法向量為

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)\times(1,3,1)=(7,-4,5)$

且通過 $A(0,0,0)$

所以平面 $ABC$ 的方程式為 $7x-4y+5z=0$

點 $(3,4,1)$ 代入得 $7\times3-4\times4+5\times1=10\neq0$

所以點 $(3,4,1)$ 沒有在平面 $ABC$ 上

(4) ○：由(1)、(2)得 $7a-4b+5c=\pm 10$

即可得知 $(a, b, c)$ 落在平面 $7x-4y+5z=\pm 10$ 上，故此平行六面體的其中一面落在平面 $7x-4y+5z=\pm 10$ 上

(5) ╳：直線 $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{5}$ 的方向向量為 $(7, -4, 5)$ 與平面 $ABC$ 的法向量平行

所以是垂直關係

故選(4)。

## 二、多選題

6. (1)(2)(4)

**出處**：第一冊〈直線與圓〉

**目標**：圓的標準式及半徑、圓與直線的關係

**解析**：(1) ○：$(x+2m)^2+(y-m)^2=5m^2-5m+2$

$=5\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$ 恆成立

圖形為以 $O(-2m, m)$ 為圓心，半徑為 $\sqrt{5\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$ 的圓

(2) ○：承(1)，圓面積為 $\left[5\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]\pi\geq\dfrac{3\pi}{4}$

(3) ╳(4) ○：$d=d(O, L)=\dfrac{|-6m-4m+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$=\dfrac{|-10m+10|}{5}=|2m-2|$

$r^2-d^2=(5m^2-5m+2)-(4m^2-8m+4)$

$=m^2+3m-2$

$\therefore r^2-d^2$ 可能為正，可能為負，也可能為 0

(5) ╳：$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{m^2+3m-2}$ 無最大值

故選(1)(2)(4)。

7. (1)(3)(4)

**出處**：第四冊〈空間中的平面與直線〉

**目標**：直線的兩面式與方向向量的概念

**解析**：(1) ○：原點 $(0, 0, 0)$ 代入 $L_1$ 的兩面式都符合

(2) ╳：若 $(a, b, c)$ 與 $(d, e, f)$ 平行，則兩平面無法交出一條直線

(3) ○：$(a, b, c)$ 與 $(d, e, f)$ 垂直仍可交出一條線

(4) ○：由兩面式已知 $(a, b, c)\times(d, e, f)$ 平行 $L_1$，且 $(a, b, c)\times(d, e, f)$ 平行 $L_2$，且 $L_1\neq L_2$

$\therefore L_1 // L_2$

(5) ╳：由(1)可知 $L_1$ 亦過原點，則 $L_1 // (6, 1, 4) // L_2$，$\overrightarrow{BC}=(-3, 0, 2)$ 不平行 $(6, 1, 4)$

故選(1)(3)(4)。

8. (2)(3)

**出處**：第一冊〈多項式函數〉

**目標**：瞭解三次函數圖形的走勢、對稱性與局部特徵

**解析**：(1) ╳：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(x-1)^3q(x)+3x+1$

比較 $x^3$ 項係數可得 $q(x)=a$

即 $f(x)=(x-1)^3\times a+3x+1$

$=a(x-1)^3+3(x-1)+4$

故對稱中心為 $(1, 4)$

(2) ○：在 $x$ 軸上，$-3-\pi$ 與 $5+\pi$ 的中點為

$\dfrac{(-3-\pi)+(5+\pi)}{2}=1$

又 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $(1, 4)$

故 $(-3-\pi, f(-3-\pi))$ 與 $(5+\pi, f(5+\pi))$ 的中點為 $(1, 4)$

得 $\dfrac{f(-3-\pi)+f(5+\pi)}{2}=4$

$\Rightarrow f(-3-\pi)+f(5+\pi)=8$

(3) ○：$a>0$，又 $y=f(x)$ 在對稱中心附近的一次近似斜率為正

故 $y=f(x)$ 為嚴格遞增函數

與 $x$ 軸只會有 1 個交點，不可能會有 3 個交點

(4) ╳：$f(x)=a(x-1)^3+3(x-1)+4$ 在對稱中心 $(1, 4)$ 附近的一次近似為 $y=3(x-1)+4$

即 $y=3x+1$

(5) ╳：$\begin{cases}y=f(x)\\y=5x-1\end{cases}$ 的交點個數即為 $f(x)=5x-1$ 的實數解個數

由 $a(x-1)^3+3(x-1)+4=5x-1$

$\Rightarrow a(x-1)^3-2(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)〔a(x-1)^2-2〕=0$

又 $a>0$，得三相異實數解 $x=1$ 或 $1\pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}$

故 $y=f(x)$ 與 $y=5x-1$ 有 3 個交點

故選(2)(3)。

9. (1)(3)(5)

**出處**：第四冊〈矩陣〉

**目標**：矩陣的運算及線性變換

**解析**：(1) ○：$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}^8$

$=\begin{bmatrix}\cos 360^\circ & -\sin 360^\circ\\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(2) ╳：$\begin{bmatrix}\cos 22.5^\circ & -\sin 22.5^\circ\\ \sin 22.5^\circ & \cos 22.5^\circ\end{bmatrix}^8$

$=\begin{bmatrix}\cos 180^\circ & -\sin 180^\circ\\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(3) ○：$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^8=(-I)^8=I^8=I$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(4) ╳：$\begin{bmatrix}\cos 240^\circ & -\sin 240^\circ\\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ\end{bmatrix}^8$

$=\begin{bmatrix}\cos 1920^\circ & -\sin 1920^\circ\\ \sin 1920^\circ & \cos 1920^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(5) ○：$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

故選(1)(3)(5)。

10. (2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：基本三角比、正弦定理與餘弦定理的應用

解析：(1) ╳：因為$\triangle ABC$為銳角三角形，所以三角形兩邊長的和必大於第三邊

$\therefore \overline{BC}+\overline{AC}>\overline{AB} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{2R}+\frac{\overline{AC}}{2R}>\frac{\overline{AB}}{2R}$，

其中 $R$ 為$\triangle ABC$的外接圓半徑

由正弦定理可知，$\sin A+\sin B>\sin C$

(2) ○：因為$\triangle ABC$為銳角三角形，由餘弦定理

可知 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\cos C$

$<\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$\left(\frac{\overline{AB}}{2R}\right)^2<\left(\frac{\overline{BC}}{2R}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}}{2R}\right)^2$，其中 $R$ 為$\triangle ABC$的外接圓半徑

由正弦定理可知，$\sin^2 C<\sin^2 A+\sin^2 B$

再由平方關係可知

$1-\cos^2 C<(1-\cos^2 A)+(1-\cos^2 B)$

$\Rightarrow \cos^2 A+\cos^2 B<1+\cos^2 C$

(3) ○：承(2)，$1+\cos^2 C>\cos^2 A+\cos^2 B$

由半角公式可知

$1+\frac{1+\cos 2C}{2}>\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}$

$\Rightarrow 1+\cos 2C>\cos 2A+\cos 2B$

(4) ○：因為$\triangle ABC$為銳角三角形

$\angle C=\pi-(\angle A+\angle B)<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \angle A+\angle B>\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}>\angle A>\frac{\pi}{2}-\angle B>0$

又正弦函數在第一象限為遞增且由餘角關係得

$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle B\right)=\cos B$

(5) ○：承(4)，$\sin A>\cos B$，

同理 $\sin B>\cos C$，$\sin C>\cos A$

$\Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$

故選(2)(3)(4)(5)。

11. (3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：古典機率的性質及條件機率、貝氏定理

解析：(1) ╳：$P$(選到 Selina 去開置物櫃)

$=P$(骰子擲出一、二、三點)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) ╳：$P$(編號 $A$ 的置物櫃被打開)

$=P$(選到 Selina 去開置物櫃且開啟編號 $A$ 的置物櫃)

$+P$(選到 Hebe 去開置物櫃且開啟編號 $A$ 的置物櫃)

$+P$(選到 Ella 去開置物櫃且開啟編號 $A$ 的置物櫃)

$=\frac{3}{6}\times\frac{90}{100}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{100}$

$=\frac{285}{600}$

$=\frac{19}{40}$

(3) ○：$P$(編號 $A$ 的置物櫃被打開 | 選到 Selina 去開置物櫃)$=\dfrac{\frac{3}{6}\times\frac{90}{100}}{\frac{3}{6}}=\frac{9}{10}$

(4) ○：$P$(選到 Selina 去開置物櫃 | 編號 $A$ 的置物櫃被打開)

$=\dfrac{P(\text{編號 }A\text{的置物櫃被打開且選到Selina 去開置物櫃})}{P(\text{編號 }A\text{的置物櫃被打開})}$

$=\dfrac{\frac{3}{6}\times\frac{90}{100}}{\frac{3}{6}\times\frac{90}{100}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{100}}$

$=\frac{270}{285}=\frac{18}{19}$

(5) ╳：$P$(編號 $A$ 的置物櫃被打開)

$=\frac{3}{6}\times\frac{90}{100}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{100}=\frac{285}{600}$

$P$(編號 $B$ 的置物櫃被打開)

$=\frac{3}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{2}{6}\times\frac{90}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{100}=\frac{200}{600}$

$P$(編號 $C$ 的置物櫃被打開)

$=\frac{3}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{90}{100}=\frac{115}{600}$

故各置物櫃被打開的機率以編號 $A$ 為最高

故選(3)(4)。

## 三、選填題

12. $\sqrt{13}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用算幾不等式搭配平面上點到直線的距離公式求解

解析：點 $P(a,b)$ 到直線 $L$ 的距離為

$d(P,L)=\frac{|2a+3b+3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|2a+3b+3|}{\sqrt{13}}$

由算幾不等式可知

$2a+3b+3\geq 2\sqrt{2a\cdot 3b}+3$

$=2\sqrt{6ab}+3=2\times5+3=13$

故 $\frac{|2a+3b+3|}{\sqrt{13}}\geq\frac{|13|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

等號成立時，$2a=3b$，

代入 $ab=\frac{25}{6}$，可得 $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{5}{3}$

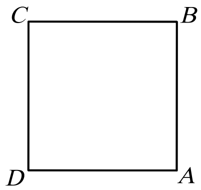
故當 $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{5}{3}$ 時，有最短距離為 $\sqrt{13}$。

13. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

**出處**：第三冊〈指數與對數函數〉

**目標**：依題意做指數函數的運算、指數圖形的應用

**解析**：由題目可知，正方形的邊長為 4




可令 $A(x\,,y)$，$B(x\,,y+4)$，$C(x-4\,,y+4)$

分別代入函數，可得 $\begin{cases} y=a^x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y+4=2a^x \cdots\cdots\cdots ② \\ y+4=3a^{x-4} \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由①，②可得 $y=4$

代回③得 $8=3\cdot\frac{a^x}{a^4}\Rightarrow 8=3\cdot\frac{4}{a^4}\Rightarrow a^4=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow a^2=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

14. 560

**出處**：第二冊〈排列組合與機率〉

**目標**：分堆分組的基本概念

**解析**：先把 8 個人平分成兩隊，因每隊人數皆為 4 人，故分隊方法數為 $\frac{C^8_4C^4_4}{2!}=\frac{8!}{4!4!2!}=35$ (種)

同時每隊需選出一人擔任隊長，故所求為

$\frac{C^8_4C^4_4}{2!}\times C^4_1\times C^4_1=35\times4\times4=560$ (種)。

15. $\frac{10}{3}$

**出處**：第三冊〈平面向量〉

**目標**：向量的係數積、長度及內積的運算

**解析**：設 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$，$E$ 點在 $\overline{OC}$ 上，

所以可設 $\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{c}$，其中 $t$ 為實數

因為 $\overline{OD}=3$ 且 $\overline{OA}=5$，所以 $\overrightarrow{DA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{a}$

因此 $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$

且 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$

因為 $\overline{BD}\perp\overline{AE}\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\right)\cdot(t\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})=0$

$\Rightarrow t|\overrightarrow{c}|^2+\left(\frac{2}{5}t-1\right)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\frac{2}{5}|\overrightarrow{a}|^2=0$

而 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{c}|\cos\angle AOC$

$=5\times4\times\frac{1}{4}=5$

所以 $16t+\left(\frac{2}{5}t-1\right)5-\frac{2}{5}\cdot25=0\Rightarrow t=\frac{5}{6}$

那麼我們可以得到 $\overline{OE}$ 長度為

$|\overrightarrow{OE}|=|t\overrightarrow{c}|=|t||\overrightarrow{c}|=\frac{5}{6}\times4=\frac{10}{3}$。

〔另解〕

以 $O$ 點為原點建立直角坐標系

$A(5\,,0)$，$B(6\,,\sqrt{15}\,)$，$C(1\,,\sqrt{15}\,)$，$D(3\,,0)$

求得直線 $AE$ 的方程式為 $3x+\sqrt{15}y=15$

直線 $OC$ 的方程式為 $y=\sqrt{15}x$

解得 $x=\frac{5}{6}$

$\overline{OE}=\frac{5}{6}\overline{OC}=\frac{5}{6}\times4=\frac{10}{3}$。

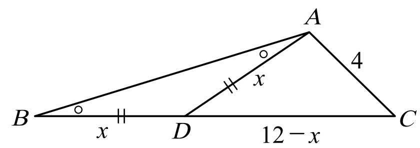
16. $\frac{8\sqrt{70}}{7}$

**出處**：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

**目標**：餘弦定理與和角公式的運用

**解析**：在 $\overline{BC}$ 上取一點 $D$ 滿足 $\overline{BD}=\overline{AD}$

且令 $\overline{BD}=x$，如下圖




$\cos(A-B)=\frac{4^2+x^2-(12-x)^2}{2\times4\times x}=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x=5\Rightarrow\overline{CD}=7$

$\cos C=\frac{4^2+7^2-5^2}{2\times4\times7}=\frac{4^2+12^2-\overline{AB}^2}{2\times4\times12}$

$\Rightarrow\overline{AB}=\frac{8\sqrt{70}}{7}$。

17. $\frac{2}{13}$

**出處**：第四冊〈空間向量〉

**目標**：利用柯西不等式求極值

**解析**：由柯西不等式

$[(a)^2+(b)^2+(2-3a-4b)^2][3^2+4^2+1^2]$

$\geq[(3a)+(4b)+(2-3a-4b)]^2=4$

所以 $[(a)^2+(b)^2+(2-3a-4b)^2]\times26\geq4$，

故得 $a^2+b^2+(2-3a-4b)^2\geq\frac{2}{13}$

等號成立時，$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{2-3a-4b}{1}$

解得 $(a\,,b)=\left(\frac{3}{13}\,,\frac{4}{13}\right)$

即當 $a=\frac{3}{13}$，$b=\frac{4}{13}$ 時，

所求有最小值為 $\frac{2}{13}$。

**第貳部分、混合題或非選擇題**

18. (4)

**出處**：第四冊〈空間向量〉

**目標**：空間坐標化，空間中兩點的距離

**解析**：建立空間坐標系，設 $O(0\,,0\,,0)$，$A(p\,,0\,,0)$，$B(0\,,q\,,0)$，$C(0\,,0\,,r)$

由題意知 $\begin{cases} q^2+r^2=m^2 \\ p^2+r^2=n^2 \\ p^2+q^2+r^2=\ell^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p^2=\ell^2-m^2 \\ q^2=\ell^2-n^2 \end{cases}$

又 $\overline{AB}^2=p^2+q^2=(\ell^2-m^2)+(\ell^2-n^2)=2\ell^2-m^2-n^2$

所以 $\overline{AB}=\sqrt{2\ell^2-m^2-n^2}$

故選(4)。

19. $13<\ell<\sqrt{194}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間坐標化，空間中兩點的距離

解析：承 18.，$\begin{cases}q^2+r^2=25\\p^2+r^2=169\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p^2-q^2=144\\p^2+q^2=194-2r^2\end{cases}$，

且 $p$，$q$，$r$ 皆大於 0

所以 $\ell^2=p^2+q^2+r^2=(194-2r^2)+r^2=194-r^2<194$

又 $\ell^2=p^2+q^2+r^2=q^2+169>169$

$\therefore 13<\ell<\sqrt{194}$ 。

20. $(\sqrt{2}\ ,0\ ,2)$

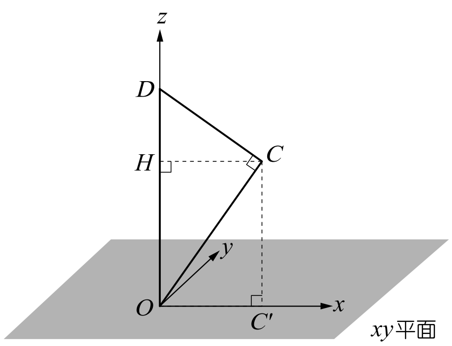
出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間坐標化，空間中兩點的距離

解析：假設 $C$ 點在 $xy$ 平面上的投影點為 $C'$

且 $C$ 在 $z$ 軸上的投影點為 $H$

根據題意可知 $C$ 點的 $x$ 坐標為 $C$ 點到直線 $\overleftrightarrow{OD}$ 的距離




又 $C$ 點在 $xy$ 平面上的投影點剛好落在 $x$ 軸正向上

所以 $y$ 坐標為 0，

最後，$C$ 點的 $z$ 坐標為 $\overline{CC'}$

因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\overline{OC}=\sqrt{6}$ ，

所以 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{3}$ 且 $\overline{OC}\perp\overline{CD}$ ，

得 $\overline{OD}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{CD}^2}=3$

由 $\overline{CH}=\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OC}}{\overline{OD}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$ ，

$\overline{CC'}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CH}^2}=2$

且 $C$ 到直線 $\overleftrightarrow{OD}$ 的距離為 $\sqrt{2}$

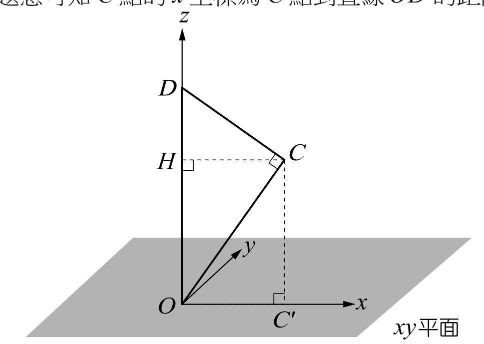
所以 $C$ 點坐標為 $(\sqrt{2}\ ,0\ ,2)$。

◎評分原則

假設 $C$ 點在 $xy$ 平面上的投影點為 $C'$

且 $C$ 在 $z$ 軸上的投影點為 $H$

根據題意可知 $C$ 點的 $x$ 坐標為 $C$ 點到直線 $\overleftrightarrow{OD}$ 的距離




又 $C$ 點在 $xy$ 平面上的投影點剛好落在 $x$ 軸正向上

所以 $y$ 坐標為 0，　(1 分)

最後，$C$ 點的 $z$ 坐標為 $\overline{CC'}$

因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\overline{OC}=\sqrt{6}$ ，

所以 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{3}$ 且 $\overline{OC}\perp\overline{CD}$ ，

得 $\overline{OD}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{CD}^2}=3$　(1 分)

由 $\overline{CH}=\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OC}}{\overline{OD}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$ ，

$\overline{CC'}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CH}^2}=2$　(1 分)

且 $C$ 到直線 $\overleftrightarrow{OD}$ 的距離為 $\sqrt{2}$　(1 分)

所以 $C$ 點坐標為 $(\sqrt{2}\ ,0\ ,2)$。　(1 分)