

112 年學科能力第六次模擬測驗數學 A(112-W6)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



一、單選題(占 30 分)

- 假設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\tan \theta = \frac{1}{3}$, 則 $\sin(\frac{23\pi}{2} - \theta)$ 之值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (4) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (5) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$
- 已知某科技公司針對某「AI 晶片」進行研發並生產，假設該晶片之利潤函數為 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 168$ (萬美元)，其中 x 為產品數量(百個)，其中 x 為正整數。若點 R 為 $f(x)$ 圖形的對稱中心，且圖形在點 R 上的局部特徵直線方程式為 $y = px + q$ 則數對 (p, q) 為下列哪一個選項？

(1) $(-10, 216)$ (2) $(-11, 224)$ (3) $(-12, 232)$ (4) $(-13, 240)$ (5) $(-14, 248)$
- 已知塞凡堡灣是烏克蘭的海軍基地，其軍艦返航的時間會受到海灣內水深的限制，水的深度夠時，才能依照軍方指示進塞凡堡灣停泊。假設某軍艦的航行官測量海灣內某日 00:00~24:00 內的時間 x (單位：時)與水深 d (單位：公尺)的關係為：

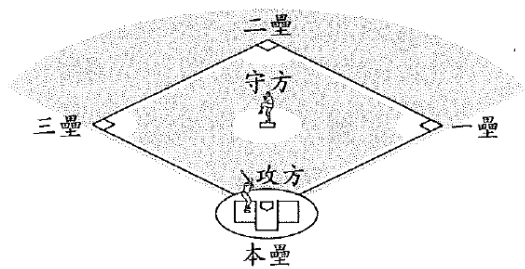
$$d(x) = a \cos\left(\frac{x}{24}\pi + \frac{\pi}{6}\right) + b$$

a, b 為實數。若當日早上 08:00 時之水深為 14 公尺，中午 12:00 時之水深為 11 公尺，則當日晚上 20:00 海灣內的水深為多少公尺？

(1) 12.5 公尺 (2) 11 公尺 (3) 9.5 公尺 (4) 8 公尺 (5) 7.5 公尺
- 坐標平面上，若二次函數 $f(x)$ 的圖形其頂點為 $R(1, 5)$ ，且 $f(x)$ 的圖形分別與 $x=4$ 、 $x=-2$ 交於 P, Q 兩點，已知 $f(4) = -4$ ，則 $\cos \angle PQR$ 之值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{9}{11}$ (5) $\frac{12}{13}$
- 假設 M, N 為兩事件，機率 $P(M \cap N), P(M), P(M \cup N)$ 三數值成等比數列，且公比 > 2 。已知 $P(N) = \frac{26}{33}$ ， $P(M' \cup N') = \frac{31}{33}$ ，則條件機率 $P(N|M)$ 為下列哪一個選項？

(1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{3}{6}$ (4) $\frac{2}{5}$ (5) $\frac{1}{4}$
- 已知棒球比賽是一種攻方將球打到防守方界內無法防守的地方，攻方球員透過這樣的安打就可以逆時針推進隊友通過一壘、二壘、三壘及三壘回本壘得分的運動(如右圖)。假設一場九局的比賽先攻的 A 隊在第二、三局分別攻下 1 分，而後攻的 B 隊在第二局攻下 2 分，前三局結束兩隊 2:2 戰成平手，如下表所示：



局數(順序)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	最終得分
先攻 A 隊得分情形	0	1	1	?	?	?	?	?	?	5
先攻 B 隊得分情形	0	2	0	?	?	?	?	?	?	3

然而小員第四局開始因為有事沒辦法繼續觀賞比賽，只知道完成正規賽九局的最終結果，先攻的 A 隊最終以得分 5:3 擊敗後攻的 B 隊。則從第四局到第九局兩隊的得分情況共有幾種可能？ (1) 288 (2) 336 (3) 468 (4) 552 (5) 624

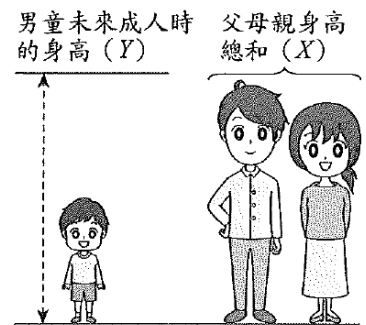
二、多選題(占 30 分)

7. 關於下列各選項，哪些二階方陣可以便一個四邊形 $PQRS$ 經該方陣線性變換後，其面積

變小？ (1) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \cos 53^\circ & -\sin 53^\circ \\ \sin 53^\circ & \cos 53^\circ \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} \cos 75^\circ & \sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$

8. 根據醫院的小兒科醫生指出，只要用對公式，就能預測男童未來成人時的身高。醫生指出男童的身高同時受到父母親的影響，若能知道父親與母親的身高總和(變數 X)就能預測估算出「男童未來成人時的身高」(變數 Y)，如右圖。假設 Y 對 X 的迴歸直線方程式為： $y = \frac{x}{2} + \frac{13}{2}$ (公分)，其中 x 代表該男童的父親與母親的身高總和。變數 X 與變數 Y 的相關係數 $r_{xy} = 0.8$ ，且變數 X 的算術平均數為 $\mu_x = 315$ 公分，標準差 $\sigma_x = 5$ 公分。關於上述資訊，試選出正確的選項。(1) Y 對 X 的迴歸直線斜率為 2



(2) Y 的算術平均數 $\mu_y = 164$ 公分 (3) Y 的標準差 $\sigma_y = \frac{25}{4}$ (4) Y 對 X 的迴歸直線必過點 $(315, 177)$ (5) 根據該迴歸直線，當某男童其父親與母親的身高總和為 333 公分時，預測估算該男童未來成人時的身高為 173 公分

9. 設空間坐標中 $C(4,1,0), D(3,0,2), E(5,-2,-1)$ ， O 為原點，則關於下列各向量的性質，試選出正確的選項。(1) 兩向量 \vec{CD} 與 \vec{CE} 互相垂直 (2) $|\vec{CD} \times \vec{CE}| = 66$ (3) 兩向量 \vec{CD} 、 \vec{CE} 所決定的三角形面積為 $\frac{\sqrt{66}}{2}$ (4) $|(\vec{OC} \times \vec{OD}) \cdot \vec{OE}|$ 之值為 $\sqrt{66}$ (5) 三向量 \vec{OC} 、 \vec{OD} 、 \vec{OE} 所決定的四面體體積為 $\frac{\sqrt{66}}{6}$

10. 假設觀光局舉辦國外旅遊團參訪高雄「文化&商圈一日遊」，早上先到高雄市文化中心 P 點集合參觀，然後中午有接駁車接送，載至新崛江商圈 Q 點用餐逛街；接著下午再去駁二藝術特區 R 點拍照留念，最後晚上到六合觀光夜市 S 點大啖美食。已知 $\triangle PSR$ 中 $\overline{PS} = 2$ 公里， $\overline{RS} = 2.4$ 公里， $\angle PSR = 120^\circ$ ，其中 \overline{SQ} 為 $\angle PSR$ 的內角平分線，如下圖。關於上述資訊，試選出正確的選項。



(1) \overline{PR} 長度為 $\sqrt{13.76}$ 公里 (2) $\triangle PSR$ 面積為 $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ 平方公里 (3) $\triangle PSR$ 的外接圓直徑為 $\sqrt{\frac{13.76}{3}}$ 公里 (4) \overline{SQ} 長度為 $\frac{12}{11}$ 公里 (5) $\triangle PSQ$ 面積為 $\frac{12\sqrt{3}}{11}$ 平方公里

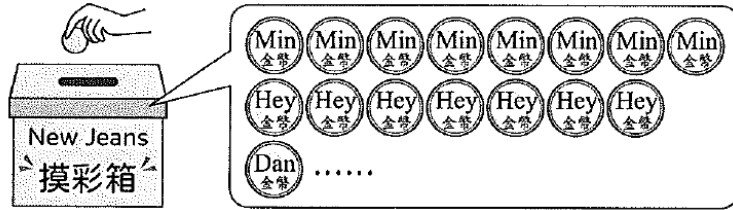
11. 已知坐標空間中有直線 $L: \frac{x}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ 、平面 $E_1: 2x - y + 2z = 9$ 及平面 $E_2: 2x - y + 2z = -6$

假設直線 L 被 E_1 、 E_2 所截線段的長度為正數 r ，試選出下列五條直線分別被 E_1 、 E_2 所

截線段的長度也為 r 的選項。 (1) $L_1: \frac{x}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$ (2) $L_2: \frac{x}{6} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{3}$

(3) $L_3: \frac{x}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ (4) $L_4: \frac{x-12}{12} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{6}$ (5) $L_5: \frac{x+6}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{-4}$

12. 假設某企業年終邀請女子天團 New Jeans 尾牙抽獎，摸彩箱中有 Min 金幣 8 枚、Hye 金幣 7 枚、以及 Dan 金幣若干枚，其中抽得每一枚 Min 金幣、Hye 金幣以及 Dan 金幣分別可兌換 60 美元、30 美元以及 50 美元的獎金。已知每一枚金幣的大小、形狀、質感完全相同(只有平面圖案不同)，且從摸彩箱中每一枚金幣被抽取出的機率均等，如下圖。假設從摸彩箱中隨機抽出 1 枚金幣可兌換金額的期望值為 47 美元，則根據上述資訊，試選出正確的選項。



(1) 從摸彩箱中任抽一枚金幣為 Min 金幣的機率為 $\frac{4}{9}$ (2) 從摸彩箱中任抽一枚金幣為 Dan 金幣的機率為 $\frac{1}{6}$ (3) 從摸彩箱中任抽一枚金幣其可兌換的獎金小於 40 美元的機率

為 $\frac{7}{18}$ (4) 從摸彩箱中任抽一枚金幣其可兌換的獎金小於 60 美元的機率為 $\frac{3}{5}$ (5) 從摸

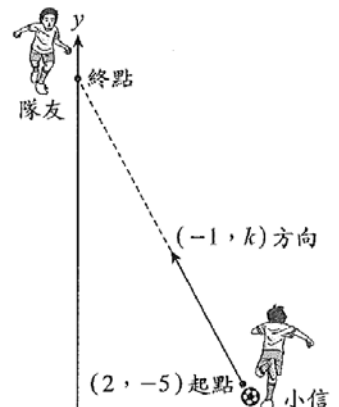
彩箱中一次任抽兩枚金幣其可兌換的獎金小於 70 美元的機率為 $\frac{21}{190}$

三、選填題(占 25 分)

13. 已知有六個數： $(2024)^0$ 、 3^{-1} 、 $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ 、 $\log_{2025} 1$ 、 $\frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$ 、 $\sin 180^\circ$ ，以上這六個數的中位數為 p ，則 p 值=_____。(化為最簡分數)

14. 已知 $a = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{6}$ 、 $b = \log_7 \frac{1}{42}$ 、 c 三數成等差，則實數 c =_____。

15. 小信和隊友一同參加足球比賽，假設比賽的部分畫面為一坐標平面，當小信在起點 $(2, -5)$ 處將球沿著向量 $(-1, k)$ 的方向踢出一段 6 單位長的線段後，該線段終點恰好被 y 軸上的隊友順利用腳控制住，如下圖所示。若 k 為正實數，則 k 值=_____。(化為最簡根式)



16. 假設函數 $f(x) = 6\sqrt{3} \cos x - 6 \sin x - 7$ ，其中 $0^\circ \leq x \leq 60^\circ$ 。已知 $f(x)$ 的最大值為 M ，且

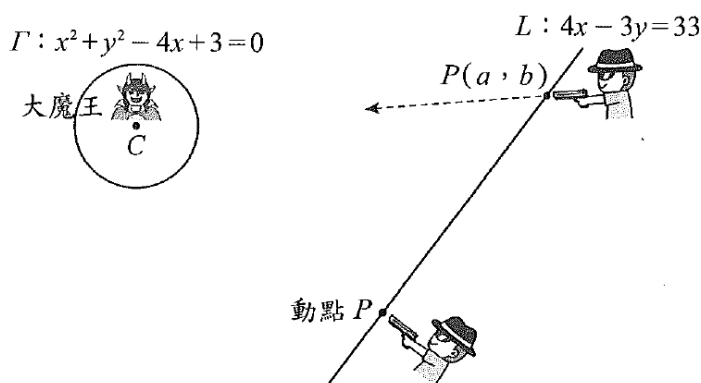
$\frac{1}{\sqrt{M+19}}$ 之值為 $\frac{b-\sqrt{3}}{a}$ ，其中 a 、 b 為正整數，則數對 (a, b) =_____。

17. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，且 $A^2 - 8A + 7I = O$ (零矩陣)，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。若 $A^4 - 6A^3 - 10A^2 + 24A - 10I = \alpha A + \beta I$ ，則實數對 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

小明參加一項電競「神槍手」射擊比賽，假設該比賽的畫面為一坐標平面，小明搖桿操縱的神槍手其動點 $P(a, b)$ 的軌跡只能在直線 $L: 4x - 3y = 33$ 上來回移動， a, b 為未知變數。該比賽神槍手第一關的目標是在移動的過程中必須擊中圓形防護罩 $\Gamma: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 內的圓心 C 大魔王，如下圖所示。已知遊戲的提示是：只有當動點 P 與圓心 C 的距離最近的時候，「神槍手」他發射的子彈才會穿越圓形防護罩 Γ 進而擊中其圓心 C 的大魔王，破關成功，晉級下一關。假設這項比賽子彈的彈道軌跡皆為直線。根據上述，試回答下列問題。



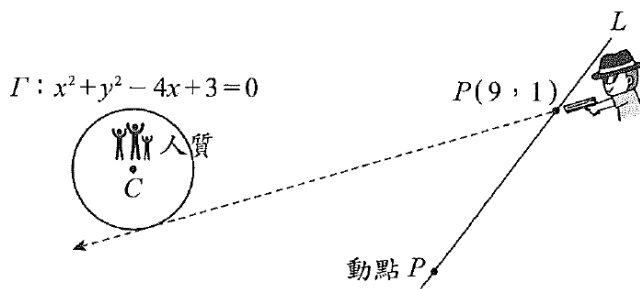
18. 如果欲使「神槍手」擊中圓心 C 的大魔王，就必須使得動點 P 與 C 的距離最接近，則此距離為下列哪個選項？(單選題，3 分)

- (1) 3 (2) $\frac{10}{3}$ (3) 4 (4) $\frac{14}{3}$ (5) 5

19. 承 18 題，當 P 與圓心 C 的距離最接近時，試推導出此時神槍手的 $P(a, b)$ 的坐標為何？(非選擇題，6 分)

20. 假設神槍手第二關的比賽是為了圓形防護罩 Γ 內的人質援救，只要神槍手發射子彈的彈道軌跡直線能與圓形 Γ 相切，就能完成援救任務，贏得最後勝利。已知當神槍手在 L 上的軌跡 P 移動到坐標 $(9, 1)$ 時，恰擊出一發子彈，且其彈道軌跡直線與圓形 Γ 相切，如下圖所示。假設該軌跡直線為 $M: px - 24y = q$ 且其斜率為正，試求數對 (p, q) 。

(非選擇題，6 分)



RA4106 112 年學科能力第六次模擬測驗數學 A(112-W6)

參考答案

選擇題：1. (1) 2. (3) 3. (4) 4. (1) 5. (5) 6. (2) 7. (3)(5) 8. (2)(5) 9. (1)(3)
10. (4) 11. (2)(3)(4) 12. (4)(5)

選填題：13. $\frac{5}{12}$ 14. -2 15. $2\sqrt{2}$ 16. (6,3) 17. (2,-3)

混合題：18. (5) 19. (6,-3) 20. (7,39)