全國公私立高中 113 學年度第四次學測模擬考數 A(南一)

RA4107

第壹部分：選擇題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 下列關於指數與對數的敘述，試選出正確的選項。(1)$\left(\log_{\pi} 2\right)^{\pi}=2$ (2)$\log_2(\pi)+\log_3(\pi)=\log_6(\pi)$ (3)$\pi^{\pi+2}\times\pi^{-2}>27$ (4)函數$y=\pi^{x}$的圖形恆在y軸右方 (5)函數$y=\log_{\pi}(x)$的圖形與函數$y=\pi^{x}$的圖形有兩個交點

2. 已知等比數列$a_1,a_2,\cdots,a_n$共有n項，每一項皆為正整數，且$a_1=1$、$a_n=2^{20}$。試問n的值可能為下列哪一個選項？ (1) 20 (2) 15 (3) 12 (4) 10 (5) 5

3. 在坐標空間中，已知$A(1,2,-3)$與$B(3,-6,5)$兩點到平面E的距離相等，且平面E與平面F：$2x+2y-z=5$沒有交點，則點$(4,0,2)$到平面E的距離為何？ (1) 2 (2)$\frac{7}{3}$ (3)$\frac{8}{3}$ (4) 3 (5)$\frac{10}{3}$

4. 設實數$x>0$，則函數$f(x)=-\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{4}{x}\right)+16$的最大值為何？
(1)-8 (2)-19 (3) 8 (4) 13 (5) 17

5. 甲、乙兩人依下列規則進行遊戲：每次先由甲從 1 到 6 中任意選取一數，再由乙投擲一個公正骰子並觀察點數。當甲選取的數字等於乙投擲骰子出現的點數時，稱為「成功」。並繼續這個過程，直到「成功」次數為 2 時遊戲結束。已知在乙投擲第三次骰子後，遊戲尚未結束，試問乙投擲第四次骰子後，遊戲就結束的機率為何？
(1)$\frac{1}{4}$ (2)$\frac{1}{8}$ (3)$\frac{1}{12}$ (4)$\frac{1}{16}$ (5)$\frac{1}{20}$

6. 已知三次實係數多項式$f(x)$的最高次項係數為 2，且函數$f(x)$在$x=1$附近的近似直線為$y=-2(x-1)+11$、而$f(x)$在$x=2$附近的近似直線為$y=-18(x-2)$。試問滿足$f(x-1)\le 0$的所有正整數之和為下列哪一個選項？
(1) 27 (2) 26 (3) 25 (4) 18 (5) 12

二、多選題(占 30 分)

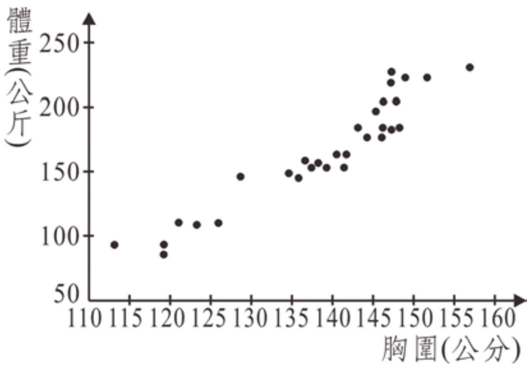
7. 小廖在夜市玩飛鏢射氣球，攤位上有一個挖有圓形洞口的保麗龍板，並在洞口處塞進一顆氣球，只要將飛鏢射入圓形洞口內部(包含圓周)，則必可擊破塞在洞口中的氣球。今建立坐標空間，並設保麗龍板位於yz平面，且圓形洞口的圓心坐標為$P(0,1,-2)$，半徑為$\sqrt{5}$，而飛鏢從點$(10,2,1)$發出，並依向量$\overrightarrow{v}$的方向直線射向保麗龍板，試問向量$\overrightarrow{v}$等於下列哪些選項時，可順利擊破氣球？ (1)$(-2,-1,0)$ (2)$(-2,0,0)$ (3)$(-3,-1,-1)$ (4)$(-6,-1,-2)$ (5)$(-5,-1,-1)$

8. 給定一實係數三次多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，已知$f(x)<0$的解為$-5<x<1$或$x>1$，則關於$f(x)$的敘述，試選出正確的選項。(1)$a>0$ (2)$f(x)$除以x的餘式為-5
(3)$y=f(x)$圖形對稱中心的x坐標為-1 (4)$f(40)<f(50)$
(5)若$f(x)$在$x=-5$附近的近似直線為$y=mx+n$，則$m<0$

9. 已知函數$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，試選出正確的選項。(1)若$0\le x<2\pi$，則

$f\left(x\right)$的最大值為$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　(2)若$0\le x<2\pi$且$f\left(x\right)$在$x=\alpha$時取得最小值，則$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$　(3)函數$y=f\left(x\right)$圖形的週期為π　(4)若$0\le\alpha<\beta<2\pi$且$f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)=\dfrac{1}{2}$，則$\alpha+\beta=\pi$　(5)若$0\le x<8\pi$，則所有滿足方程式$f\left(x\right)=0$的相異實數解之和為30π

10.下左圖是某種麋鹿的胸圍x(公分)與體重y(公斤)的二維數據之散布圖，經過計算可知這 30 隻麋鹿的胸圍x與體重y的算術平均數與標準差如下右表。

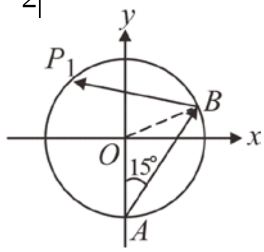


	算術平均數	標準差
胸圍x（公分）	139.27	11.26
體重y（公斤）	171.27	43.83

根據上述數據，試選出正確的選項。　(1)從這 30 隻麋鹿中任選一隻，則牠的體重小於 150 公斤的機率大於18%　(2)從這 30 隻麋鹿中任選一隻，已知牠的胸圍大於 140 公分，則牠的體重大於 200 公斤的條件機率大於55%　(3)這 30 隻麋鹿體重的中位數大於 180 公斤
(4) y對x的迴歸直線斜率小於 4　(5)利用迴歸直線進行預估，一隻胸圍 160 公分的麋鹿，其體重大於 255 公斤

11.在坐標平面上，設向量$\overrightarrow{a}=(k+1,4)$，向量$\overrightarrow{b}=(1,k-2)$，試選出正確的選項。(1)當$k=0$時，對任意向量$\overrightarrow{c}$，可以找到數對$\left(x,y\right)$使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$　(2) 當$k=3$時，對任意向量$\overrightarrow{c}$，無法找到數對$\left(x,y\right)$使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$　(3)當$\overrightarrow{c}=(3,2)$時，對任意實數k，至多找到一組數對$\left(x,y\right)$使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$　(4)當$\overrightarrow{c}=(1,-4)$時，對任意實數$k$，至多找到一組數對$\left(x,y\right)$使得$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$　(5)可找到實數k，使得$\begin{vmatrix}k+1 & 1\\ 4 & k-2\end{vmatrix}=-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

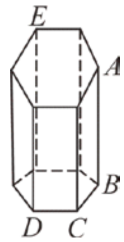
12.在坐標平面上，$O\left(0,0\right)$為原點，$A\left(0,-1\right)$為單位圓上一點，試選出正確的選項。(1)一質點由點A且沿著與y軸正向夾角為$15°$的方向直線前進，經點B反射(即$\angle OBA=\angle OBP_1$)至圓上的點P_1，再反射至圓上的點P_2，如圖所示。如此連續進行n次反射後會到圓上的點P_n，則點P_{114}的坐標為$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(2)設n為正整數，若點A經矩陣$J=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$連續作線性變換$n$次的對應點為$Q_n\left(x_n,y_n\right)$，即$J^n\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$，則滿足$\overline{Q_nQ_{n+1}}>2025$的最小正整數$n$為 8　(3)設矩陣



$M_k=\begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{180} & -\sin\frac{k\pi}{180}\\ \sin\frac{k\pi}{180} & \cos\frac{k\pi}{180}\end{bmatrix}$，$N_k=\begin{bmatrix}\cos\frac{k\pi}{180} & \sin\frac{k\pi}{180}\\ \sin\frac{k\pi}{180} & -\cos\frac{k\pi}{180}\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，若單位圓上的動點$C(a,b)$在第一象限且$\frac{1}{2}<a<1$，點$C$經矩陣$M_1N_2M_2N_4M_3T$作線性變換的對應點為點$D$，則點$D$的坐標可能為$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ (4)設$J=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$、$T=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$、$S=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，若單位圓經矩陣$SJT$變換後的圖形為$\Gamma$，則$O$點與$\Gamma$上的點之最長距離與最短距離的和為 35 (5)設$J=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$、$T=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$、$U=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，若單位圓經矩陣$UJT$變換後的圖形為$\Omega$，則$O$點與$\Omega$上的點之最長距離與最短距離的和為 25

三、選填題(占 25 分)

13. 已知$\overrightarrow{a}=(1,2,3)$、$\overrightarrow{b}=(-1,1,2)$、$\overrightarrow{c}=(3,5,6)$、$\overrightarrow{d}=(4,-5,-11)$，若$\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$，則$x+y+z=$________。



14.如圖(此為示意圖)，有一個六角柱體，上底、下底均為邊長為 1 的正六邊形，且柱高$\overline{AB}=3$，則$\cos(\angle ADE+\angle CDE)$的值為________。(化成最簡根式)

15.小南想要安排七天的運動計畫。他打算安排的運動項目為：桌球、羽球、重訓、太極拳。若他每天只進行一種運動且每種運動要至少進行一次，則他安排運動計畫的方式有________種。

16.在坐標空間中兩向量$\overrightarrow{a}=(1,-2,-2)$及$\overrightarrow{b}$滿足$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(0,1,-1)$，已知$\overrightarrow{b}=x\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$，其中$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$，且$x$為實數。若$\overrightarrow{c}=(p,q,r)$，則$p^2-q^2+r^2$之值為________。(化成最簡分數)

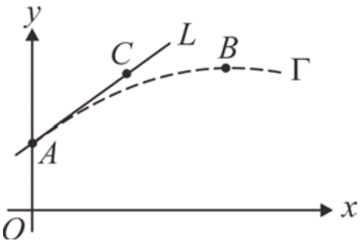
17.設點$A(x_1,y_1)$在$y=2^x$的圖形上，點$B(x_2,y_2)$在$y=\log_2 x$的圖形上，且A、B均在第一象限，若O為坐標平面上的原點，已知$\overline{OA}=\overline{OB}=4\sqrt{17}$且$\cos\angle AOB=\frac{8}{17}$，則$\frac{x_1+2x_2}{y_1+2y_2}$之值為________。(化成最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

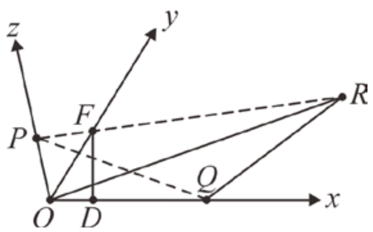
以下是針對排球少年裡影山與日向的「怪人快攻」的情報分析：

右圖為平面直角坐標系，拋物線Γ為影山托球時，排球行進的軌跡，從A點開始上升，到最高點B點(頂點)時，日向會在該點殺球。如果是「怪人快攻」時，軌跡會變成直線L，從A點上升到C點時，則日向會改在該點殺球。



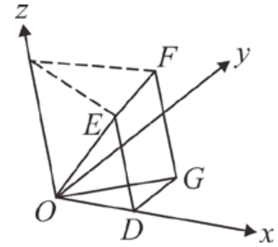
18.設$A(0,2)$、$B(6,4)$，Γ會通過A、B兩點，若直線L為Γ在$x=0$的一次近似(局部近似)，則直線L的斜率為何？(單選題，3 分)　(1)$\frac{2}{3}$　(2)$\frac{3}{4}$　(3)$\frac{4}{5}$　(4)1　(5)$\frac{6}{5}$

19.如圖所示，在空間中，日向殺球的擊球點為P點，排球行進的軌跡為直線，排球的落地點均在$\overline{QR}$上，其中$\overline{PQ}$為排球行進的最短路徑，$\overline{PR}$為排球行進的最遠路徑，且$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$兩線段對xy平面的投影分別為$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$。設$O(0,0,0)$、$P(0,0,4)$、$Q(8,0,0)$、$R(12,8,0)$，$\overline{DF}$為兩歪斜線$\overleftrightarrow{OQ}$與$\overleftrightarrow{PR}$的公垂線段，求F點的坐標為________。



(選填題，6 分)

20.承 19 題，右圖為 19 題圖中四面體$OPQR$與一平面Ω圍成的五面體$DEFGOP$，其中四邊形$DEFG$為四面體$OPQR$與平面Ω所截。攔中手要在此五面體內活動，才能封住日向的殺球。四邊形$DEFG$中，D、F兩點為公垂線段的垂足點，且D、E兩點的x坐標相同，試求五面體$DEFGOP$的體積為多少？(錐體體積$=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高)　(非選擇題，6 分)



參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\ \sqrt{3}\approx 1.732,\ \sqrt{5}\approx 2.236,\ \sqrt{6}\approx 2.449,\ \pi\approx 3.142$。
指對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010,\ \log_{10}3\approx 0.4771,\ \log_{10}5\approx 0.6990,\ \log_{10}7\approx 0.8451$。

RA4107　全國公私立高中 113 學年度第四次學測模擬考數 A(南一)

參考答案

選擇題：**1.** (3)　**2.** (5)　**3.** (2)　**4.** (1)　**5.** (4)　**6.** (2)　**7.** (4)(5)　**8.** (3)(5)　**9.** (1)(2)(5)
10. (1)(4)　**11.** (1)(3)(5)　**12.** (4)(5)

選填題：**13.** -6　**14.** $\frac{-\sqrt{15}}{8}$　**15.** 8400　**16.** $\frac{16}{81}$　**17.** $\frac{3}{2}$

混合題：**18.** (1)　**19.** $F(\frac{12}{5},\frac{8}{5},\frac{16}{5})$　**20.** $\frac{32}{5}$