# 全國公私立高級中學 113 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

# 數學 A 考科解析

考試日期：113 年 12 月 10~11 日

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13-1 | 13-2 | 14-1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 2 | 45 | 35 | 125 | 14 | 135 | 45 | — | 6 | — |
| 14-2 | 14-3 | 14-4 | 15-1 | 15-2 | 15-3 | 15-4 | 16-1 | 16-2 | 16-3 | 16-4 | 17-1 | 17-2 | 18 | 19-1 |
| 1 | 5 | 8 | 8 | 4 | 0 | 0 | 1 | 6 | 8 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 19-2 | 19-3 | 19-4 | 19-5 | 19-6 | 19-7 | 19-8 | 20 | | | | | | | |
| 2 | 5 | 8 | 5 | 1 | 6 | 5 | | | | | | | | |

## 第壹部分、選擇（填）題

### 一、單選題

1. 【知識點】對數律、指數與對數函數圖形

【解析】

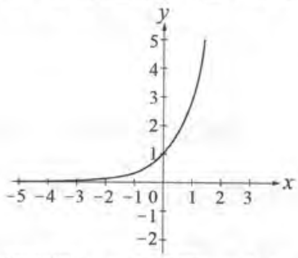
(1) ×：已知 $0<\log_\pi 2<1$，$0<(\log_\pi 2)^\pi<1\neq 2$。

(2) ×：根據對數律，$\log_\pi 2+\log_\pi 3=\log_\pi 6$，

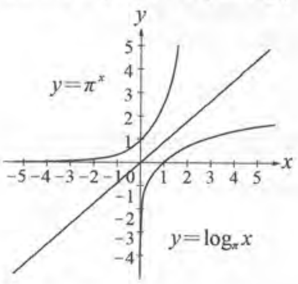
故 $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_3\pi}=\dfrac{1}{\log_6\pi}$，才符合對數律。

(3) ○：$\pi^{\pi+2}\times\pi^{-2}=\pi^\pi>\pi^3>3^3=27$。

(4) ×：$y=\pi^x$ 的圖形如下圖，故與敘述不符。




(5) ×：如下圖，$y=\pi^x$ 與 $y=\log_\pi x$ 沒有交點。




故選(3)。

2. 【知識點】數列與級數

【解析】設公比為 $r$，由 $a_n=2^{20}\Rightarrow r^{n-1}=2^{20}$。

(1) ×：若 $n=20\Rightarrow r^{19}=2^{20}\Rightarrow r=2^{\frac{20}{19}}$，
此時各項不為正整數（不合）。

(2) ×：若 $n=15\Rightarrow r^{14}=2^{20}\Rightarrow r=2^{\frac{20}{14}}$，
此時各項不為正整數（不合）。

(3) ×：若 $n=12\Rightarrow r^{11}=2^{20}\Rightarrow r=2^{\frac{20}{11}}$，
此時各項不為正整數（不合）。

(4) ×：若 $n=10\Rightarrow r^{9}=2^{20}\Rightarrow r=2^{\frac{20}{9}}$，
此時各項不為正整數（不合）。

(5) ○：若 $n=5\Rightarrow r^{4}=2^{20}\Rightarrow r=2^{5}$，
此時各項為正整數（合）。

故選(5)。

3. 【知識點】空間中的平面與直線

【解析】平面 $E$ 與平面 $F：2x+2y-z=5$ 沒有交點，
即表示平面 $E$ 與平面 $2x+2y-z=5$ 平行，
故可設平面 $E$ 方程式為 $2x+2y-z=k$，
又 $A(1,2,-3)$ 與 $B(3,-6,5)$ 兩點到平面 $E$ 的距離相等，
則 $\dfrac{|9-k|}{3}=\dfrac{|-11-k|}{3}\Rightarrow 9-k=\pm(k+11)\Rightarrow k=-1$，

所以點 $(4,0,2)$ 到平面 $E：2x+2y-z+1=0$ 的距離

$=\dfrac{|8+0-2+1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{3}$。

故選(2)。

4. 【知識點】實數、二次函數

【解析】令 $t=x+\dfrac{4}{x}\Rightarrow f(x)=-t^2-2t+16$，

則 $f(x)=-(t+1)^2+17$，

由算幾不等式可得 $t=x+\dfrac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，

所以當 $t=4$ 時，$f(x)$ 有最大值 $-8$。

故選(1)。

5. 【知識點】條件機率

【解析】每次猜中的機率為 $\dfrac{1}{6}$，猜錯的機率為 $\dfrac{5}{6}$，

所求為 $\dfrac{C^3_1(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})^1\times\frac{1}{6}}{(\frac{5}{6})^3+C^3_1(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})^1}=\dfrac{1}{16}$，

其中分母為成功 0 次或成功 1 次、分子為前三次成功 1 次且第 4 次成功。

故選(4)。

6. 【知識點】三次函數的圖形特徵、多項式不等式

【解析】

假設 $f(x)=2(x-1)^3+a(x-1)^2-2(x-1)+11$
$=2(x-2)^3+b(x-2)^2-18(x-2)$，

因為 $f(1)=11=-2+b+18\Rightarrow b=-5$，
$f(2)=2+a-2+11=0\Rightarrow a=-11$，

所以 $f(x)=2(x-1)^3-11(x-1)^2-2(x-1)+11$
$=2x^3-17x^2+26x$，

$\Rightarrow f(x)=x(x-2)(2x-13)$

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)(x-3)(2x-15)\leq 0$，

所以 $x\leq 1$ 或 $3\leq x\leq\dfrac{15}{2}$，因為要求正整數解，

所以 $x=1、3、4、5、6、7$，總和為 26。

故選(2)。

### 二、多選題

7. 【知識點】空間中的直線方程式、直線與平面的關係

【解析】

(1) ×：令 $L_1=\begin{cases}x=10-2t\\ y=2-t\\ z=1\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

與 $yz$ 平面交於 $A(0,-3,1)$，

則 $\overline{PA}=5>\sqrt{5}\Rightarrow$ 在圓外。

(2) ×：令 $L_2=\begin{cases}x=10-2t\\ y=2\\ z=1\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

與 $yz$ 平面交於 $B(0,2,1)$，

則 $\overline{PB}=\sqrt{10}>\sqrt{5}\Rightarrow$ 在圓外。

(3) ×：令 $L_3=\begin{cases}x=10-3t\\ y=2-t\\ z=1-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

與 $yz$ 平面交於 $C\,(0,\dfrac{-4}{3},\dfrac{-7}{3})$，

則 $\overline{PC}=\dfrac{\sqrt{50}}{3}>\sqrt{5}\Rightarrow$ 在圓外。

(4) ○：令 $L_4=\begin{cases}x=10-6t\\ y=2-t\\ z=1-2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

與 $yz$ 平面交於 $D\,(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{-7}{3})$，

則 $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}<\sqrt{5}\Rightarrow$ 在圓內。

(5) ○：令 $L_5=\begin{cases}x=10-5t\\ y=2-t\\ z=1-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

與 $yz$ 平面交於 $E\,(0,0,-1)$，

則 $\overline{PC}=\sqrt{2}<\sqrt{5}\Rightarrow$ 在圓內。

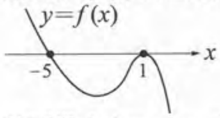
故選(4)(5)。

8. 【知識點】多項式函數

【解析】

(1) ×：因為 $f(x)<0$ 的解為 $-5<x<1$ 或 $x>1$，

所以 $y=f(x)$ 的圖形如下，故 $a<0$。




(2) ×：故可得 $f(x)=a\,(x-1)^2\,(x+5)$，

利用餘式定理可得 $f(x)$ 除以 $x$ 的餘式

$=f(0)=a\,(-1)^2\times5=5a$（不一定為 $-5$）。

(3) ○：由 $f(x)=a\,(x-1)^2\,(x+5)=ax^3+3ax^2-9ax+5a$，

可得 $b=3a$，$c=-9a$，$d=5a$，

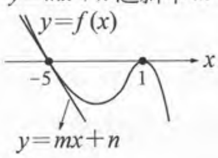
所以 $y=f(x)$ 圖形對稱中心的

$x$ 坐標 $=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{3a}{3a}=-1$。

(4) ×：由圖形可知，$f(40)>f(50)$。

(5) ○：由圖形可知，$f(x)$ 在 $x=-5$ 附近的近似直線

$y=mx+n$ 之斜率 $m<0$。




故選(3)(5)。

9. 【知識點】三角函數的圖形、正餘弦的疊合

【解析】因為角度不同，所以先將三角函數展開

$$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\text{。}$$

(1) ○：若 $0\le x<2\pi$，$-\dfrac{\pi}{4}\le x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}$，

所以 $-1\le\sin(x-\dfrac{\pi}{4})\le1$，

則 $f(x)$ 最大值為 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。

(2) ○：承(1)，$f(x)$ 有最小值時 $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{4}$。

(3) ×：$f(x)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$，

角度 $x$ 的係數為 1，所以週期為 $2\pi$。

(4) ×：$f(x)$ 的對稱軸為 $x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，

$0\le\alpha$、$\beta<2\pi$ 為方程式 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的二根，

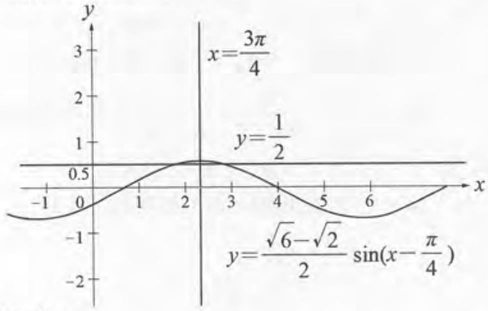
可知 $\alpha$、$\beta$ 對稱於 $x=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{2}$。

(5) ○：$f(x)=0\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=n\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$，

又 $0\le x<8\pi$，

所以 $x=\dfrac{\pi}{4}、\dfrac{5\pi}{4}、\dfrac{9\pi}{4}、\dfrac{13\pi}{4}、\dfrac{17\pi}{4}、\dfrac{21\pi}{4}、\dfrac{25\pi}{4}、\dfrac{29\pi}{4}$，

所有的解相加為 $30\pi$。




故選(1)(2)(5)。

10. 【知識點】古典機率、二維數據分析、數 4A 條件機率

【解析】

(1) ○：由圖可知有 6 隻麋鹿體重小於 150 公斤，

機率為 $\dfrac{6}{30}=20\%>18\%$。

(2) ×：由圖可知有 17 隻麋鹿胸圍大於 140 公分，

其中有 8 隻體重大於 200 公斤，

條件機率為 $\dfrac{8}{17}<53\%$。

(3) ×：由圖可知麋鹿的體重中位數約為 170 公斤。

(4) ○：因為迴歸直線斜率 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=r\cdot\dfrac{43.83}{11.26}<3.9r$，

且 $0<r<1$，所以 $m<4$。

(5) ×：迴歸直線方程式為 $y-171.27=m\,(x-139.27)$，

將 $x=160$ 代入可知

$y=m\,(160-139.27)+171.27<4\times20.73+171.27$

$=254.19<255$。

故選(1)(4)。

11. 【知識點】向量線性組合與克拉瑪公式概念

【解析】(1)～(4)分成 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 是否平行討論：

(I) 若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 不平行，則 $k+1:4\neq1:k-2$，

即 $k\neq3,-2$ 時，任意 $\overrightarrow{c}$ 都可拆成唯一一組 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$。

(II) 若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 平行，則 $k=3,-2$，

$k=3\Rightarrow\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 平行 $(1,1)$，只要 $\overrightarrow{c}$ 平行 $(1,1)$，

$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 的 $x,y$ 都有（無限多）解；

$k=-2\Rightarrow\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 平行 $(1,-4)$，故 $\overrightarrow{c}=(1,-4)$ 時，

只要找 $k=-2$，$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 的 $x,y$ 都有無限多解。

綜合以上，當 $\overrightarrow{c}=(3,2)$ 時，只有 $k\neq3,-2$ 時 $x,y$ 唯一解、$k=3,-2$ 時 $x,y$ 無解兩種結果，故不可能有 $k$ 可使 $x,y$ 多於一組解。

(5) $\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 4 & k-2 \end{vmatrix}=-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ 表示 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，

且從 $\overrightarrow{a}$ 到 $\overrightarrow{b}$ 是順時針轉。

由 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ 可得 $k=\frac{7}{5}$，

此時 $\overrightarrow{a}=(\frac{12}{5},4)$，$\overrightarrow{b}=(1,\frac{-3}{5})$

符合從 $\overrightarrow{a}$ 到 $\overrightarrow{b}$ 順時針轉。

故選(1)(3)(5)。

12.【知識點】等比數列、三角比的性質、正餘弦函數的疊合、矩陣的應用

【解析】

(1) ×：$\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow \angle AOB=\angle BOP_1=\angle P_1OP_2=\cdots=\angle P_{113}OP_{114}$

$=\pi-2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}$，

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\sin\frac{5\pi}{6} \\ \sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{bmatrix}^{115}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\frac{575\pi}{6} & -\sin\frac{575\pi}{6} \\ \sin\frac{575\pi}{6} & \cos\frac{575\pi}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}，$$

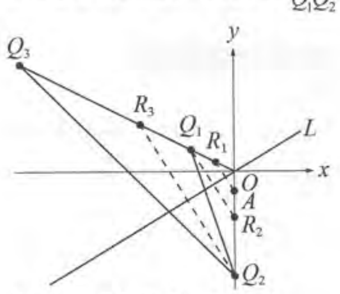
則 $P_{114}(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$。

(2) ×：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$，

為鏡射軸為 $L$ 且以原點為中心伸縮 $\sqrt{5}$ 倍的鏡射與伸縮矩陣的合成，設 $R_1$、$R_2$、$R_3$ 分別為 $A$、$Q_1$、$Q_2$ 對 $L$ 的對稱點，且 $\overline{OA}=\overline{OR_1}$，$\overline{OQ_1}=\overline{OR_2}$，$\overline{OQ_2}=\overline{OR_3}$，

由 $\frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OR_1}}=\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OR_2}}=\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OR_3}}=\sqrt{5}$ 可得 $\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}=\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}=\sqrt{5}$，

則 $OQ_1Q_2$ 相似於 $OQ_2Q_3$ 且 $\frac{\overline{Q_2Q_3}}{\overline{Q_1Q_2}}=\sqrt{5}$，




$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$、

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$，

則 $Q_1(-2,1)$ 且 $Q_2(0,-5)$，$\overline{Q_1Q_2}=2\sqrt{10}$，

則 $\langle\overline{Q_nQ_{n+1}}\rangle$ 為首項是 $2\sqrt{10}$，公比是 $\sqrt{5}$ 的等比數列，

$\frac{2025}{2\sqrt{10}}\approx 320$ 且 $125\sqrt{5}<125\cdot\frac{5}{2}<320$，

$2\sqrt{10}\cdot(\sqrt{5})^{n-1}>2025\Rightarrow(\sqrt{5})^{n-1}>320$

$\Rightarrow n\geq 9$，最小正整數 $n$ 為 9。

(3) ×：$M_1N_2=N_3=\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{180} & \sin\frac{3\pi}{180} \\ \sin\frac{3\pi}{180} & -\cos\frac{3\pi}{180} \end{bmatrix}$，

$M_2N_4=N_6=\begin{bmatrix} \cos\frac{6\pi}{180} & \sin\frac{6\pi}{180} \\ \sin\frac{6\pi}{180} & -\cos\frac{6\pi}{180} \end{bmatrix}$，

$N_3N_6=\begin{bmatrix} \cos(-\frac{3\pi}{180}) & -\sin(-\frac{3\pi}{180}) \\ \sin(-\frac{3\pi}{180}) & \cos(-\frac{3\pi}{180}) \end{bmatrix}=M_3^{-1}$

$\Rightarrow N_3N_6M_3=I_2$，

則 $M_1N_2M_2N_4M_3=(M_1N_2)(M_2N_4)M_3=N_3N_6M_3=I_2$

且 $M_1N_2M_2N_4M_3T=T$，

設 $C(\cos\theta,\sin\theta)$，$\frac{1}{2}<a<1\Rightarrow\frac{1}{2}<\cos\theta<1$

$\Rightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{3}$，

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

為以原點為中心逆時針旋轉 $\beta$ 再伸縮 $\sqrt{5}$ 倍的旋轉與伸縮矩陣的合成，$\cos\beta>\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 0<\beta<\frac{\pi}{6}$，則 $0<\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，

則點 $D$ 不會落在第二象限，

點 $D$ 的坐標不可能為 $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$。

(4) ○：$0\leq\theta<2\pi$，$T$ 將單位圓 $x^2+y^2=1$ 變換至圓 $x^2+y^2=5$ 且 $J$ 將圓 $x^2+y^2=5$ 變換至圓 $x^2+y^2=25$，

$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5\cos\theta \\ 5\sin\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20\cos\theta \\ 15\sin\theta \end{bmatrix}$，

$S$ 將圓 $x^2+y^2=25$ 的點 $(5\cos\theta,5\sin\theta)$ 變換至點 $(20\cos\theta,15\sin\theta)$，

$(20\cos\theta)^2+(15\sin\theta)^2=25(16\cos^2\theta+9\sin^2\theta)$

$=25[16\cos^2\theta+9(1-\cos^2\theta)]=25(7\cos^2\theta+9)$，

由 $9\leq 7\cos^2\theta+9\leq 16$ 可得

$15\leq\sqrt{(20\cos\theta)^2+(15\sin\theta)^2}\leq 20$，

最長矩離與最短距離之和為 35。

(5) ○：$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 為沿 $y$ 軸方向推移 $x$ 坐標的 $\frac{3}{2}$ 倍再以原點為中心伸縮為原來 2 倍的推移與伸縮矩陣的合成，$T$ 將單位圓 $x^2+y^2=1$ 變換至圓 $x^2+y^2=5$ 且 $J$ 將圓 $x^2+y^2=5$ 變換至圓 $x^2+y^2=25$，由

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5\cos\theta \\ 5\sin\theta \end{bmatrix}=10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}=10\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \frac{3}{2}\cos\theta+\sin\theta \end{bmatrix}$

可知單位圓 $x^2+y^2=1$ 經推移矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 變換後所

得的圖形再以原點為中心伸縮為原來的 10 倍即為圖形Ω，

$(\cos\theta)^2+(\frac{3}{2}\cos\theta+\sin\theta)^2=1+\frac{9}{4}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin 2\theta$

$=\frac{17}{8}+\frac{3}{2}(\frac{3}{4}\cos 2\theta+\sin 2\theta)$，$0\le\theta<2\pi$，

由$|\frac{3}{4}\cos 2\theta+\sin 2\theta|\le\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1^2}=\frac{5}{4}$

可得$\frac{1}{2}\le\sqrt{(\cos\theta)^2+(\frac{3}{2}\cos\theta+\sin\theta)^2}\le 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10\le 10\sqrt{(\cos\theta)^2+(\frac{3}{2}\cos\theta+\sin\theta)^2}\le 2\cdot 10$

$\Rightarrow 5\le 10\sqrt{(\cos\theta)^2+(\frac{3}{2}\cos\theta+\sin\theta)^2}\le 20$，

則 $O$ 點與Ω上的點之最長距離為 20 且最短距離為 5，兩者的和為 25。

故選(4)(5)。

## 三、選填題

13.【知識點】高斯消去法

【解析】$\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$

$\Rightarrow(4,-5,-11)=(x-y+3z,2x+y+5z,3x+2y+6z)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y+3z=4\\2x+y+5z=-5\\3x+2y+6z=-11\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&3&4\\2&1&5&-5\\3&2&6&-11\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{第1列}\times(-3)\text{加到第3列}]{\text{第1列}\times(-2)\text{加到第2列}}\begin{bmatrix}1&-1&3&4\\0&3&-1&-13\\0&5&-3&-23\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2列}\times(-3)\text{加到第3列}}\begin{bmatrix}1&-1&3&4\\0&3&-1&-13\\0&-4&0&16\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第3列}\times(-\frac{1}{4})}\begin{bmatrix}1&-1&3&4\\0&3&-1&-13\\0&1&0&-4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-4\\3y-z=-13\\x-y+3z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-4\\z=1\\x=-3\end{cases},$$

則 $x+y+z=(-3)+(-4)+1=-6$。

14.【知識點】餘弦定理

【解析】因為 $\overline{AE}=\overline{BD}=\sqrt{3}$，

所以 $\overline{AD}=\overline{DE}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$，

由餘弦定理可知 $\cos(\angle ADE)=\frac{7}{8}$，$\angle CDE=90°$，

所以 $\cos(\angle ADE+\angle CDE)=-\sin(\angle ADE)=\frac{-\sqrt{15}}{8}$。

15.【知識點】計數原理、組合

【解析】四種運動進行的天數只可能是 4,1,1,1、3,2,1,1、2,2,2,1，各類先決定每種運動進行的天數，再將運動的項目安排到這七天，分類討論如下：

(Ⅰ) 4,1,1,1：$C^4_1\times\frac{7!}{4!}=840$。

(Ⅱ) 3,2,1,1：$C^4_1\times C^3_1\times\frac{7!}{3!2!}=5040$。

(Ⅲ) 2,2,2,1：$C^4_3\times\frac{7!}{2!2!2!}=2520$。

故共有 $840+5040+2520=8400$ 種。

16.【知識點】空間向量的外積與正射影概念

【解析】

由 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$（因為 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 張出的平面上），

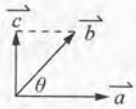
得 $\overrightarrow{c}$ 平行 $(1,-2,-2)\times(0,1,-1)=(4,1,1)$。

<法一>

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 夾角為 $\theta$，

則 $\sqrt{2}=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=3|\overrightarrow{b}|\sin\theta$，

如右圖，可知 $|\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}|\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，




所以 $\overrightarrow{c}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{18}}(4,1,1)$，

$p^2-q^2+r^2=\frac{1}{81}(16-1+1)=\frac{16}{81}$。

實際上由圖可知 $\overrightarrow{c}$ 和 $(4,1,1)$ 為反方向，但本題不必做以上判斷也可求解。

<法二>

設 $\overrightarrow{c}=t(4,1,1)$，

由 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\times(x\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$

$=t(0,-9,9)=(0,1,-1)$，

得 $t=\frac{1}{9}$，所求 $p^2-q^2+r^2=16t^2=\frac{16}{81}$。

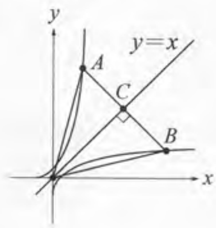
17.【知識點】餘弦定理、指數與對數函數圖形

【解析】$\overline{OA}=\overline{OB}\Rightarrow A$ 與 $B$ 在以原點 $O(0,0)$ 為圓心，半徑為 $4\sqrt{17}$ 的圓Γ上，直線 $y=x$ 為圓Γ的對稱軸且 $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，故圓Γ與 $y=2^x$、$y=\log_2 x$ 的交點 $A$、$B$ 也對稱於直線 $y=x$，由餘弦定理得

$\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{17})^2+(4\sqrt{17})^2-2\cdot 4\sqrt{17}\cdot 4\sqrt{17}\cdot\frac{8}{17}}=12\sqrt{2}$，

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(4\sqrt{17})^2-(6\sqrt{2})^2}=10\sqrt{2}$，

設 $C(c,c)$，$A(a,2^a)$，則 $B(2^a,a)$




$\overline{OC}=\sqrt{2}c=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow c=10\Rightarrow C(10,10)$，

$C$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，

則 $\frac{2^a+a}{2}=10$，$2^a+a=20$，

$\overline{AB}=\sqrt{2}(2^a-a)=12\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2^a-a=12$，則 $\begin{cases}2^a+a=20\\2^a-a=12\end{cases}$，$a=4$，

$A(4,16)$ 且 $B(16,4)$，$\frac{x_1+2x_2}{y_1+2y_2}=\frac{3}{2}$。

## 第貳部分、混合題或非選擇題

18.【知識點】一次近似

【解析】設Γ：$y=a(x-6)^2+4$（Γ過頂點 $B(6,4)$），

$A(0,2)$ 代入Γ得 $a=-\frac{1}{18}$

$\Rightarrow$ Γ：$y=-\frac{1}{18}(x-6)^2+4=-\frac{1}{18}x^2+\frac{2}{3}x+2$

所以Γ在 $x=0$ 的一次近似為 $y=\frac{2}{3}x+2$，斜率為 $\frac{2}{3}$，

故選(1)。

19. 【知識點】兩歪斜線公垂線段的垂足點

【解析】直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 方向向量為 $\overrightarrow{v}=(1,0,0)$，

直線 $\overleftrightarrow{PR}$ 方向向量為 $\overrightarrow{u}=(3,2,-1)$。

令 $D(t,0,0)$，$F(3s,2s,4-s)$，

所以 $\overrightarrow{DF}=(3s-t,2s,4-s)$。

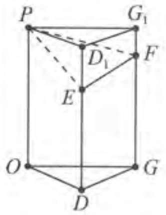
$\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{v}\Rightarrow 3s-t=0$……①

$\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{u}\Rightarrow 5s-4=0$……②

由①②得 $s=\dfrac{4}{5}$，$t=\dfrac{12}{5}$，所以 $F(\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5})$。

20. 【知識點】利用空間概念計算五面體體積

【解析】由上題知 $F(\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5})$，




$D(\dfrac{12}{5},0,0)$，且 $E(\dfrac{12}{5},0,\dfrac{14}{5})$。

所以平面方程式 $\Omega$：$x=\dfrac{12}{5}$。

取 $D_1(\dfrac{12}{5},0,4)$，$G_1(\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5},4)$，

得一三角柱體 $ODG-PD_1G_1$。

五面體 $DEFGOP$ 體積＝三角柱體體積－五面體 $PD_1G_1EF$ 體積，

$$三角柱體體積=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{DG}\times\overline{OP}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{8}{5}\times4=\frac{192}{25}，$$

$$五面體\ PD_1G_1EF\ 體積=\frac{1}{3}\times(梯形\ D_1G_1EF\ 面積)\times\overline{PD_1}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{(1.2+0.8)\times1.6}{2}\times\frac{12}{5}=\frac{32}{25}，$$

所以五面體 $DEFGOP$ 體積 $=\dfrac{192}{25}-\dfrac{32}{25}=\dfrac{32}{5}$。