全國高中 114 年(113 學年度)高三上
第四次聯合模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 下列關於指數與對數的敘述，試選出正確的選項。

(1) $\left(\log_{\pi} 2\right)^{\pi} = 2$　　(2) $\log_2(\pi)+\log_3(\pi)=\log_6(\pi)$

(3) $\pi^{\pi+2}\times\pi^{-2} > 27$　　(4)函數 $y=\pi^x$ 的圖形恆在 y 軸右方

(5)函數 $y=\log_{\pi}(x)$ 的圖形與函數 $y=\pi^x$ 的圖形有兩個交點　【114 全國學測模 ④】

答：(3)

解：(1)(2)無此規則

(3) $\pi^{\pi} > \pi^{3} > 3^{3}$

(4) $x<0$ 時，圖形在 y 軸左側

(5)無交點

2. 已知等比數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 共有 n 項，每一項皆為正整數，且 $a_1=1$、$a_n=2^{20}$。試問 n 的值可能為下列哪一個選項？

(1) 20　(2) 15　(3) 12　(4) 10　(5) 5　【114 全國學測模 ④】

答：(5)

解：$2^{20}=2^{2\times2\times5}=1\times r^{n-1}$，$r, n\in N$，選項中僅 $n=5$ 可成立

3. 在坐標空間中，已知 $A(1,2,-3)$ 與 $B(3,-6,5)$ 兩點到平面 E 的距離相等，且平面 E 與平面 F：$2x+2y-z=5$ 沒有交點，則點 $(4,0,2)$ 到平面 E 的距離為何？

(1) 2　(2) $\frac{7}{3}$　(3) $\frac{8}{3}$　(4) 3　(5) $\frac{10}{3}$　【114 全國學測模 ④】

答：(2)

解：$\overline{AB}$ 中點 $M(2,-2,1)\xrightarrow{E//F:2x+2y-z=5} E$：$2x+2y-z=-1$

$d\left((4,0,2),2x+2y-z+1=0\right)=\frac{|8+0-2+1|}{3}=\frac{7}{3}$

4. 設實數 $x>0$，則函數 $f(x)=-\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{4}{x}\right)+16$ 的最大值為何？

(1) -8　(2) -19　(3) 8　(4) 13　(5) 17　【114 全國學測模 ④】

答：(1)

解：$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

$$f(x)=-\left[\left(x+\frac{4}{x}\right)+1\right]^2+17\le-[4+1]^2+17=-8$$

5. 甲、乙兩人依下列規則進行遊戲：每次先由甲從 1 到 6 中任意選取一數，再由乙投擲一個公正骰子並觀察點數。當甲選取的數字等於乙投擲骰子出現的點數時，稱為「成功」。並繼續這個過程，直到「成功」次數為 2 時遊戲結束。已知在乙投擲第三次骰子後，遊戲尚未結束，試問乙投擲第四次骰子後，遊戲就結束的機率為何？

(1)$\frac{1}{4}$　(2)$\frac{1}{8}$　(3)$\frac{1}{12}$　(4)$\frac{1}{16}$　(5)$\frac{1}{20}$　【114 全國學測模 ④】

答：(4)

解：單次成功機率：$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times6=\frac{1}{6}$

條件機率：$\dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{3!}{2!}}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{3!}{2!}+\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{1}{16}$

6. 已知三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 2，且函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的近似直線為 $y=-2(x-1)+11$、而 $f(x)$ 在 $x=2$ 附近的近似直線為 $y=-18(x-2)$。試問滿足 $f(x-1)\le0$ 的所有正整數之和為下列哪一個選項？

(1) 27　(2) 26　(3) 25　(4) 18　(5) 12　【114 全國學測模 ④】

答：(2)　此題佳

解：$f(x)=2(x-1)^3+p(x-1)^2-2(x-1)+11$

$=2x^3+(p-6)x^2+(4-2p)x+(p+11)$

$=2(x-2)^3+(p+6)(x-2)^2+\underbrace{(2p+4)(x-2)+(p+11)}_{=-18(x-2)+0}$

$\therefore p=-11$，$f(x)=2x^3-17x^2+26x=x(x-2)(2x-13)$

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)(x-3)(2x-15)\le0\ \Rightarrow x\le1$ 或 $3\le x\le\frac{15}{2}$

$x\in N\ \Rightarrow x=1,3,4,5,6,7$，合計 26

二、多選題

7. 小廖在夜市玩飛鏢射氣球，攤位上有一個挖有圓形洞口的保麗龍板，並在洞口處塞進一顆氣球，只要將飛鏢射入圓形洞口內部（包含圓周），則必可擊破塞在洞口中的氣球。今建立坐標空間，並設保麗龍板位於 yz 平面，且圓形洞口的圓心坐標為 $P(0,1,-2)$，半徑為 $\sqrt{5}$，而飛鏢從點 $(10,2,1)$ 發出，並依向量 $\overrightarrow{v}$ 的方向直線射向保麗龍板，試問向量 $\overrightarrow{v}$ 等於下列哪些選項時，可順利擊破氣球？

(1)$(-2,-1,0)$　(2)$(-2,0,0)$　(3)$(-3,-1,-1)$

(4)$(-6,-1,-2)$　(5)$(-5,-1,-1)$　【114 全國學測模 ④】

答：(4)(5)　此題佳

解：(1) $\begin{cases} x=10-2t \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ 與 yz 平面交於 $A\left(0,\frac{9}{5},1\right)$ $\Rightarrow \overline{AP}=\frac{\sqrt{241}}{5}>\sqrt{5}$

(2) $\begin{cases} x=10-2t \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 與 yz 平面交於 $B(0,2,1)$ $\Rightarrow \overline{BP}=\sqrt{10}>\sqrt{5}$

(3) $\begin{cases} x=10-3t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$ 與 yz 平面交於 $C\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{7}{3}\right)$ $\Rightarrow \overline{CP}=\frac{\sqrt{50}}{3}>\sqrt{5}$

(4) $\begin{cases} x=10-6t \\ y=2-t \\ z=1-2t \end{cases}$ 與 yz 平面交於 $D\left(0,\frac{1}{3},\frac{-7}{3}\right)$ $\Rightarrow \overline{DP}=\frac{\sqrt{5}}{3}<\sqrt{5}$

(5) $\begin{cases} x=10-5t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$ 與 yz 平面交於 $E(0,0,-1)$ $\Rightarrow \overline{EP}=\sqrt{2}<\sqrt{5}$

8. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $f(x)<0$ 的解為 $-5<x<1$ 或 $x>1$，則關於 $f(x)$ 的敘述，試選出正確的選項。

(1) $a>0$
(2) $f(x)$ 除以 x 的餘式為 -5
(3) $y=f(x)$ 圖形對稱中心的 x 坐標為 -1
(4) $f(40)<f(50)$
(5) 若 $f(x)$ 在 $x=-5$ 附近的近似直線為 $y=mx+n$，則 $m<0$

【114 全國學測模 ④】

答：(3)(5)　此題佳

解：$f(x)=a(x+5)(x-1)^2$，$a<0$

$=a\left(x^3+3x^2-9x+5\right)$，故 $f(x)$ 除以 x 之餘式 $=5a$

$=a\left[(x+1)^3-12(x+1)+16\right]$，對稱中心 $(-1,16a)$

而 $x>1$ 時，$f(x)$ 遞減 $\Rightarrow f(40)>f(50)$

則 $f(x)=a(x+5)^3-12a(x+5)^2+\underbrace{36a}_{m}(x+5)$，$m<0$

9. 已知函數 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，試選出正確的選項。

(1) 若 $0\le x<2\pi$，則 $f(x)$ 的最大值為 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(2) 若 $0\le x<2\pi$ 且 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 時取得最小值，則 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$

(3) 函數 $y=f(x)$ 圖形的週期為 π

(4) 若 $0\le\alpha<\beta<2\pi$ 且 $f(\alpha)=f(\beta)=\frac{1}{2}$，則 $\alpha+\beta=\pi$

(5)若 $0\le x<8\pi$，則所有滿足方程式 $f(x)=0$ 的相異實數解之和為 30π

【114 全國學測模 ④】

答：(1)(2)(5)　此題佳

解：$f(x)=\left[\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x\right]-\left[\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\sin x\right]$

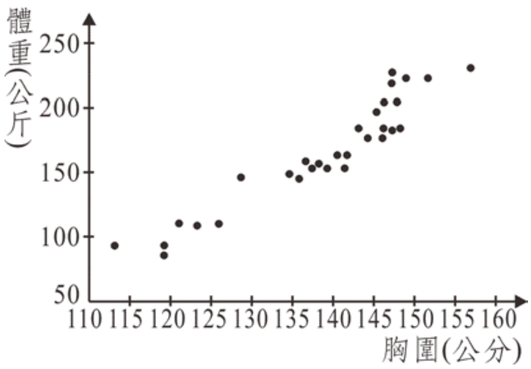
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left[\sin x-\cos x\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

週期 $2\pi\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{2}$

$$\xrightarrow{-\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{31\pi}{4}}x-\frac{\pi}{4}=0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi,\cdots,7\pi$$

$x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4},\cdots,\dfrac{29\pi}{4}$，總和 $=30\pi$

10. 下左圖是某種麋鹿的胸圍 x（公分）與體重 y（公斤）的二維數據之散布圖，經過計算可知這 30 隻麋鹿的胸圍 x 與體重 y 的算術平均數與標準差如下右表。



	算術平均數	標準差
胸圍 x（公分）	139.27	11.26
體重 y（公斤）	171.27	43.83

根據上述數據，試選出正確的選項。

(1)從這 30 隻麋鹿中任選一隻，則牠的體重小於 150 公斤的機率大於 18%

(2)從這 30 隻麋鹿中任選一隻，已知牠的胸圍大於 140 公分，則牠的體重大於 200 公斤的條件機率大於 55%

(3)這 30 隻麋鹿體重的中位數大於 180 公斤

(4) y 對 x 的迴歸直線斜率小於 4

(5)利用迴歸直線進行預估，一隻胸圍 160 公分的麋鹿，其體重大於 255 公斤

【114 全國學測模 ④】

答：(1)(4)　此題佳

解：(1) $\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}=20\%>18\%$

(2) $\dfrac{8}{30}=26\cdots\%<55\%$

(3)應小於 180

(4) $\dfrac{S_y}{S_x}=\dfrac{43.83}{11.26}\doteqdot 3.89\cdots\xrightarrow{-1\le r\le 1}m=r\times\dfrac{S_y}{S_x}=3.89\cdots r<4$

(5) $L:(y-171.27)=3.89\cdots r(x-139.27)\Rightarrow y=80.6397r+171.27<255$

11. 在坐標平面上，設向量 $\vec{a}=(k+1,4)$，向量 $\vec{b}=(1,k-2)$，試選出正確的選項。

(1)當 $k=0$ 時，對任意向量 $\vec{c}$，可以找到數對 (x,y) 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

(2)當 $k=3$ 時，對任意向量 $\vec{c}$，無法找到數對 (x,y) 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

(3)當 $\vec{c}=(3,2)$ 時，對任意實數 k，至多找到一組數對 (x,y) 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

(4)當 $\vec{c}=(1,-4)$ 時，對任意實數 k，至多找到一組數對 (x,y) 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

(5)可找到實數 k，使得 $\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 4 & k-2 \end{vmatrix}=-|\vec{a}||\vec{b}|$ 【114 全國學測模 ④】

$\boxed{答}$：(1)(3)(5)　此題佳

$\boxed{解}$：(1) $\vec{c}=x(1,4)+y(1,-2)$，可作基底

(2) $\vec{c}=x(4,4)+y(1,1)$，當 $\vec{c}=t(1,1)$ 時有解

(3) $(3,2)=x(k+1,4)+y(1,k-2)\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x+y=3\\4x+(k-2)y=2\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 4 & k-2 \end{vmatrix}=k^2-k-6=(k-3)(k+2)$$

當 $k\neq 3,-2$，恰一解；當 $k=3,-2$，無解

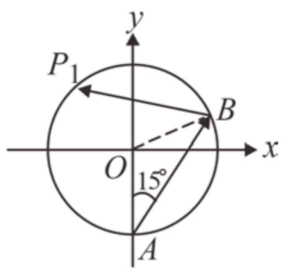
(4) $(1,-4)=x(k+1,4)+y(1,k-2)\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x+y=1\\4x+(k-2)y=-4\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 4 & k-2 \end{vmatrix}=k^2-k-6=(k-3)(k+2)$$

當 $k\neq 3,-2$，恰一解；當 $k=3$，無解；當 $k=-2$，無限多解

(5)此時，$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow k=\dfrac{7}{5}$

12. 在坐標平面上，$O(0,0)$ 為原點，$A(0,-1)$ 為單位圓上一點，試選出正確的選項。



(1)一質點由點 A 且沿著與 y 軸正向夾角為 $15°$ 的方向直線前進，經點 B 反射（即 $\angle OBA=\angle OBP_1$）至圓上的點 P_1，再反射至圓上的點 P_2，如圖所示。如此連續進行 n 次反射後會到圓上的點 P_n，則點 P_{114} 的坐標為 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)設 n 為正整數，若點 A 經矩陣 $J=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$ 連續作線性變換 n 次的對應點為 $Q_n(x_n,y_n)$，即 $J^n\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$，則滿足 $\overline{Q_nQ_{n+1}}>2025$ 的最小正整數 n 為 8

(3)設矩陣 $M_k=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{k\pi}{180} & -\sin\dfrac{k\pi}{180}\\ \sin\dfrac{k\pi}{180} & \cos\dfrac{k\pi}{180}\end{bmatrix}$，$N_k=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{k\pi}{180} & \sin\dfrac{k\pi}{180}\\ \sin\dfrac{k\pi}{180} & -\cos\dfrac{k\pi}{180}\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$，

若單位圓上的動點$C(a,b)$在第一象限且$\frac{1}{2}<a<1$，點C經矩陣$M_1N_2M_2N_4M_3T$作線性變換的對應點為點D，則點D的坐標可能為$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

(4)設$J=\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$、$T=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$、$S=\begin{bmatrix}4&0\\0&3\end{bmatrix}$，若單位圓經矩陣$SJT$變換後的圖形為$\Gamma$，則$O$點與$\Gamma$上的點之最長距離與最短距離的和為 35

(5)設$J=\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$、$T=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$、$U=\begin{bmatrix}2&0\\3&2\end{bmatrix}$，若單位圓經矩陣$UJT$變換後的圖形為$\Omega$，則$O$點與$\Omega$上的點之最長距離與最短距離的和為 25　　【114 全國學測模 ④】

答：(4)(5)　此題佳

解：(1) $\begin{bmatrix}\cos150^\circ&-\sin150^\circ\\\sin150^\circ&\cos150^\circ\end{bmatrix}^{115}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\\-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac12\\-\frac{\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\cos\theta=\frac{(0,-1)\cdot(-2,1)}{1\times\sqrt5}=\frac{-1}{\sqrt5}$

$\overline{Q_1Q_2}=\sqrt{(\sqrt5)^2+5^2-2\cdot\sqrt5\cdot5\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt5}\right)}=\sqrt{40}$

$\overline{Q_nQ_{n+1}}=\sqrt{40}\times(\sqrt5)^{n-1}>2025\Rightarrow n\ge9$

(3) $M_1N_2M_2N_4M_3TC=D$

$\Rightarrow C=T^{-1}M_3^{-1}N_4^{-1}M_2^{-1}N_2^{-1}M_1^{-1}D$

$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{180}&\sin\frac{3\pi}{180}\\-\sin\frac{3\pi}{180}&\cos\frac{3\pi}{180}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi}{180}&\sin\frac{4\pi}{180}\\\sin\frac{4\pi}{180}&-\cos\frac{4\pi}{180}\end{bmatrix}$

$\times\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{180}&\sin\frac{2\pi}{180}\\-\sin\frac{2\pi}{180}&\cos\frac{2\pi}{180}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{180}&\sin\frac{2\pi}{180}\\\sin\frac{2\pi}{180}&-\cos\frac{2\pi}{180}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{180}&\sin\frac{\pi}{180}\\-\sin\frac{\pi}{180}&\cos\frac{\pi}{180}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\frac35\\\frac45\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}I\begin{bmatrix}-\frac35\\\frac45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{5\sqrt5}\\\frac{11}{5\sqrt5}\end{bmatrix}$

(4)單位圓經 SJT 運算，得 $\dfrac{x^2}{20^2}+\dfrac{y^2}{15^2}=1$

最長距離 $=20$ ，最短距離 $=15$

(5)單位圓經 UJT 變換

最長距離 $=1\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times2\times\dfrac{3}{2}=15$

最短距離 $=1\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times2\times1=10$

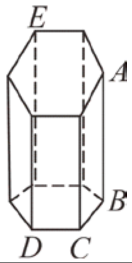
三、選填題

13.已知 $\overrightarrow{a}=(1,2,3)$、$\overrightarrow{b}=(-1,1,2)$、$\overrightarrow{c}=(3,5,6)$、$\overrightarrow{d}=(4,-5,-11)$，若 $\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$，則 $x+y+z=$__________。 【114 全國學測模 ④】

答： -6

解： $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x+y+5z=-5 \\ 3x+2y+6z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=1 \end{cases}$

14.如圖（此為示意圖），有一個六角柱體，上底、下底均為邊長為 1 的正六邊形，且柱高 $\overline{AB}=3$ ，則 $\cos(\angle ADE+\angle CDE)$的值為__________。（化成最簡根式）



【114 全國學測模 ④】

答： $\dfrac{-\sqrt{15}}{8}$ 此題佳

解： $D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E(-\sqrt{3},0,3)$，$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},3\right)$

$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{3},0,3)$，$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2}$ ，$\overrightarrow{DA}=\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},3\right)$，$|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{12}$

$\cos\angle ADE=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DA}|}=-\dfrac{7}{8} \Rightarrow \sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

所求 $=\cos(\angle ADE+90^\circ)=-\sin\angle ADE=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

15.小南想要安排七天的運動計畫。他打算安排的運動項目為：桌球、羽球、重訓、太極拳。若他每天只進行一種運動且每種運動要至少進行一次，則他安排運動計畫的方式有__________種。 【114 全國學測模 ④】

答： 8400 此題佳

解： 四同三異 $C_1^4 C_3^3\times\dfrac{7!}{4!}=840$

三同二同二異$C_1^4C_1^3C_2^2\times\dfrac{7!}{3!2!}=5040$

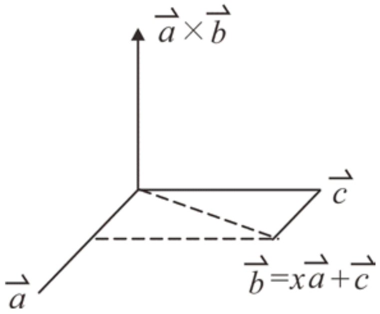
二同二同二同一異$C_3^4C_1^1\times\dfrac{7!}{2!2!2!}=2520$

合計8400

16.在坐標空間中兩向量 $\vec{a}=(1,-2,-2)$及 $\vec{b}$ 滿足 $\vec{a}\times\vec{b}=(0,1,-1)$，已知 $\vec{b}=x\vec{a}+\vec{c}$，其中 $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，且 x 為實數。若 $\vec{c}=(p,q,r)$，則 $p^2-q^2+r^2$ 之值為________。（化成最簡分數）【114 全國學測模 ④】

答：$\dfrac{16}{81}$ 此題佳

解：$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\,//\,\vec{c}=t(4,1,1)$



$\Rightarrow\vec{b}=(x+4t,-2x+t,-2x+t)$

$\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=(0,9t,-9t)=(0,1,-1)\ \Rightarrow t=\dfrac{1}{9}$

$\vec{c}=\left(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{9}\right)$

$\Rightarrow$所求$=\left(\dfrac{4}{9}\right)^2-\left(\dfrac{1}{9}\right)^2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^2=\dfrac{16}{81}$

17.設點 $A(x_1,y_1)$在 $y=2^x$ 的圖形上，點 $B(x_2,y_2)$在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，且 A、B 均在第一象限，若 O 為坐標平面上的原點，已知 $\overline{OA}=\overline{OB}=4\sqrt{17}$ 且 $\cos\angle AOB=\dfrac{8}{17}$，則 $\dfrac{x_1+2x_2}{y_1+2y_2}$ 之值為________。（化成最簡分數）【114 全國學測模 ④】

答：$\dfrac{3}{2}$

解：取 $\overline{AB}$ 中點 M，則 $\angle AOM=\angle BOM=\theta$

$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos\angle AOB}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\ \Rightarrow\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$

故 $\overline{OM}=4\sqrt{17}\times\cos\theta=10\sqrt{2}\ \Rightarrow M(10,10)$

$\overline{AM}=\overline{BM}=4\sqrt{17}\sin\theta=6\sqrt{2}\ \Rightarrow A(4,16)$，$B(16,4)$

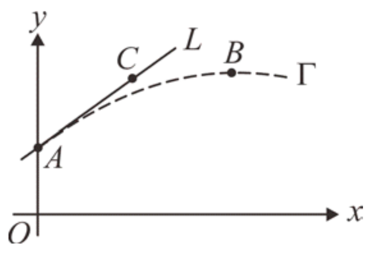
則 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2}=10$，所求$=\dfrac{(x_1+x_2)+x_2}{(y_1+y_2)+y_2}=\dfrac{20+16}{20+4}=\dfrac{3}{2}$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

以下是針對排球少年裡影山與日向的「怪人快攻」的情報分析：

右圖為平面直角坐標系，拋物線 Γ 為影山托球時，排球行進的軌跡，從 A 點開始上升，到最高點 B 點（頂點）時，



日向會在該點殺球。如果是「怪人快攻」時，軌跡會變成直
線L，從A點上升到C點時，則日向會改在該點殺球。

18.設$A(0,2)$、$B(6,4)$，Γ會通過A、B兩點，若直線L為Γ在$x=0$的一次近似（局部近似），則直線L的斜率為何？（單選題）

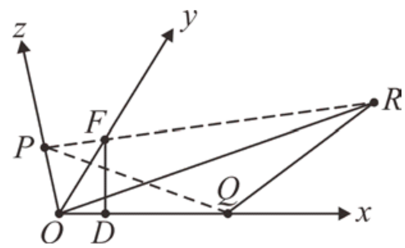
(1)$\frac{2}{3}$　(2)$\frac{3}{4}$　(3)$\frac{4}{5}$　(4)1　(5)$\frac{6}{5}$　【114 全國學測模 ④】

答：(1)

解：Γ：$y=a(x-6)^2+4$，過$(0,2)$ $\Rightarrow a=-\frac{1}{18}$

$\Rightarrow \Gamma$：$y=-\frac{1}{18}(x-6)^2+4=-\frac{1}{18}x^2+\frac{2}{3}x+2 \Rightarrow$ 一次近似 $y=\frac{2}{3}x+2$

19.如圖所示，在空間中，日向殺球的擊球點為P點，排球行進的軌跡為直線，排球的落地點均在$\overline{QR}$上，其中$\overline{PQ}$為排球行進的最短路徑，$\overline{PR}$為排球行進的最遠路徑，且$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$兩線段對xy平面的投影分別為$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$。設$O(0,0,0)$、$P(0,0,4)$、$Q(8,0,0)$、$R(12,8,0)$，$\overline{DF}$為兩歪斜線$\overleftrightarrow{OQ}$與$\overleftrightarrow{PR}$的公垂線段，求F點的坐標為________。



【114 全國學測模 ④】

答：$\left(\frac{12}{5},\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$

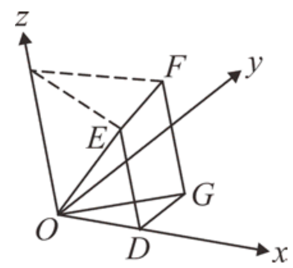
解：$\overleftrightarrow{PR}:\begin{cases}x=0+12t\\ y=0+8t\\ z=4-4t\end{cases}$，$\overleftrightarrow{OQ}:\begin{cases}x=s\\ y=0\\ z=0\end{cases}$

$\overrightarrow{FD}=(s-12t,-8t,-4+4t)$，$\overrightarrow{PR}=(12,8,-4)$，$\overrightarrow{OQ}=(1,0,0)$

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{PR}=0$ 且 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ $\Rightarrow t=\frac{1}{5}$，$s=\frac{12}{5}$，故$F\left(\frac{12}{5},\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$，$D\left(\frac{12}{5},0,0\right)$

20. 承 19 題，右圖為 19 題圖中四面體 $OPQR$ 與一平面 Ω 圍成的五面體 $DEFGOP$，其中四邊形 $DEFG$ 為四面體 $OPQR$ 與平面 Ω 所截。欄中手要在此五面體內活動，才能封住日向的殺球。四邊形 $DEFG$ 中，D、F 兩點為公垂線段的垂足點，且 D、E 兩點的 x 坐標相同，試求五面體 $DEFGOP$ 的體積為多少？

（錐體體積 $=\frac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高）　　【114 全國學測模 ④】



答：$\frac{32}{5}$

解：由上題知 $F\left(\frac{12}{5},\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$，$D\left(\frac{12}{5},0,0\right)$，且 $E\left(\frac{12}{5},0,\frac{14}{5}\right)$

所以平面方程式 Ω：$x=\frac{12}{5}$，取 $D_1\left(\frac{12}{5},0,4\right)$，$G_1\left(\frac{12}{5},\frac{8}{5},4\right)$

得一三角柱體 $ODG-PD_1G_1$

五面體 $DEFGOP$ 體積 $=$ 三角柱體體積 $-$ 五面體 PD_1G_1EF 體積

三角柱體體積 $=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{DG}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{8}{5}\times 4=\frac{192}{25}$

五面體 PD_1G_1EF 體積 $=\frac{1}{3}\times\left(\text{梯形 } D_1G_1EF \text{ 面積}\right)\times\overline{PD_1}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{(1.2+0.8)\times 1.6}{2}\times\frac{12}{5}=\frac{32}{25}$$

所以五面體 $DEFGOP$ 體積 $=\frac{192}{25}-\frac{32}{25}=\frac{32}{5}$