數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(2)	(4)	(4)	(3)	(5)	(1)(2)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(2)(3)	(1)(4)(5)	(1)(2)(5)	(2)(5)	(1)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：乘法公式、根式化簡

解析：令 $\sqrt{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}=|a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c|$，

其中 a，b，c 為有理數

則 $(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c)^2=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

又 $(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c)^2$

$=3a^2+2b^2+c^2+2ab\sqrt{6}+2bc\sqrt{2}+2ac\sqrt{3}$

且 $\sqrt{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}>0$

因此 $\begin{cases}3a^2+2b^2+c^2=6\\2ab=-2\\2bc=-2\\2ac=2\end{cases}$

可得 $(a\,,b\,,c)=(1\,,-1\,,1)$ 或 $(-1\,,1\,,-1)$

$\therefore \sqrt{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$

$=|\sqrt{3}-\sqrt{2}+1|$ 或 $|-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1|$

$\approx 1.732-1.414+1=1.318$

故選(3)。

2. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：算術平均數、標準差、數據的變化

解析：令 $2024=n$，且 $\sigma_x=12$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\times(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-16^2=144$

$\Rightarrow x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2=400n$

$\mu_y=\frac{1}{n}\times(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)$

$=\frac{1}{n}\times\left(\left(\frac{1}{8}x_1{}^2-3x_1+11\right)+\left(\frac{1}{8}x_2{}^2-3x_2+11\right)+\cdots\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{8}x_n{}^2-3x_n+11\right)\right)$

$=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{8}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-3(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+11n\right)$

$=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{8}\times400n-3\times16n+11n\right)=13$

故選(2)。

3. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正弦定理、角度換算公式

解析：連接 $\overline{CD}$

$\because \overline{AD}$ 為直徑

$\therefore \angle ACD=90^\circ \Rightarrow \angle CED=90^\circ-\angle CDE$

$\triangle BCD$ 的外接圓直徑為 $\overline{AD}=8$

由正弦定理得：$\frac{5}{\sin\angle CDB}=8$

又 $\angle CDE=\angle CDB$，則 $\sin\angle CDE=\frac{5}{8}$

所求 $\sin\angle CED=\sin(90^\circ-\angle CDE)$

$=\cos\angle CDE=\frac{\sqrt{39}}{8}$

故選(4)。

4. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：中位數的判讀、一般組合、乘法原理與加法原理

解析：分數由小至大的排列為 30，30，40，50，50，60，70，90，中位數 $M=50$

任意選 3 人成績的中位數為 50 分的情形有兩種情形

情形 1：

低於 50 分有 1 人，恰為 50 分有 1 人，高於 50 分有 1 人，則方法數有 $C^3_1C^2_1C^3_1=18$ 種

情形 2：

兩人 50 分，另一人非 50 分，則方法數有 $C^6_1C^2_2=6$ 種

共有 $18+6=24$ 種

故選(4)。

5. (3)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：兩直線關係、向量的外積、空間中的直線方程式、直線方向向量

解析：先理解空間中的直線與直線中：

①若兩直線的方向向量平行，則兩直線有無限多條公垂線

②若兩直線的方向向量不平行，則兩直線只有一條公垂線

(1)因為兩平面 $x=0$，$x=1$ 平行，且兩平面 $y=0$，$y=2$ 平行，所以 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 為兩平行線

(2) $\begin{cases}2x+y-2=0\\x+y=0\end{cases}$ 的方向向量

$\overrightarrow{d_1}\,//\,(2\,,1\,,0)\times(1\,,1\,,0)=(0\,,0\,,1)$

$\begin{cases}3x-y=0\\x-y=0\end{cases}$ 的方向向量

$\overrightarrow{d_2}\,//\,(3\,,-1\,,0)\times(1\,,-1\,,0)=(0\,,0\,,-2)$

由於方向向量 $\overrightarrow{d_1}\,//\,\overrightarrow{d_2}$

故兩直線有無限多條公垂線

(3) $\begin{cases}x-y+1=0\\y+z-3=0\end{cases}$ 的方向向量

$\overrightarrow{d_3}\,//\,(1\,,-1\,,0)\times(0\,,1\,,1)=(-1\,,-1\,,1)$

$\begin{cases}x-3y+13=0\\2x-6y+z+1=0\end{cases}$ 的方向向量

$\overrightarrow{d_4}\,//\,(1\,,-3\,,0)\times(2\,,-6\,,1)=(-3\,,-1\,,0)$

明顯 $\overrightarrow{d_3}$ 與 $\overrightarrow{d_4}$ 不平行，即為所求

(4) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ 與 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$ 中，
兩直線的方向向量滿足 $(2,1,-2)\,//\,(4,2,-4)$，故兩直線有無限多條公垂線

(5) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 與 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ 中，
兩直線的方向向量滿足 $(1,1,2)\,//\,(2,2,4)$，故兩直線有無限多條公垂線

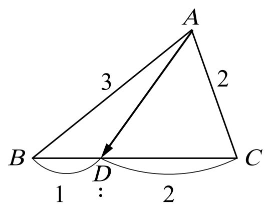
故選(3)。

6. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量的分點公式、空間向量的內積

解析：$\overline{AB}=\sqrt{1+4+4}=3$



$\because 0<\angle A<\pi$

$\therefore -6<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<6$

$\because \overline{BD}:\overline{CD}=1:2$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|^2$

$=\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\dfrac{4}{9}\times 9+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}\times 4$

$=\dfrac{40}{9}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{16}{9}<|\overrightarrow{AD}|^2<\dfrac{64}{9}\Rightarrow \dfrac{4}{3}<\overline{AD}<\dfrac{8}{3}$

$\Rightarrow a+b=\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}=4$

故選(5)。

二、多選題

7. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：實數的四則運算、古典機率、條件機率

解析：(1) ○：最小乘積 $900\times 7=6300$，
最大乘積 $999\times 7=6993$
所以 c 值必為 6

(2) ○：當 b 為偶數時，f 為偶數
當 b 為奇數時，f 為奇數
故 $b+f$ 必為偶數

(3) ╳：由(1)可知 d 值可能為 3 到 9，共 7 個

(4) ╳：當 $d=6$ 時，符合算式有
$943\times 7=6601$、$944\times 7=6608$、……、
$957\times 7=6699$，共 15 個
所求機率為 $\dfrac{15}{100}=\dfrac{3}{20}$

(5) ○：由(4)知，當 $d=6$ 時，共有 15 個
當 $d=6$ 且 $e=5$ 時，符合算式有
$950\times 7=6650$、$951\times 7=6657$，共 2 個
所求機率為 $\dfrac{2}{15}$

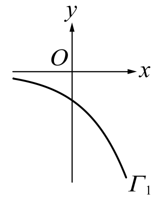
故選(1)(2)(5)。

8. (1)(2)(3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數函數圖形、伸縮與對稱、對數律

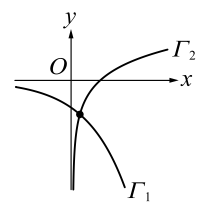
解析：(1) ○：當 $a<0$ 時，Γ_1 的圖形如下



圖形的凹口向下

(2) ○：$y=b\cdot\log_3 x$ 的定義域為 $\{x\mid x\in\mathbb{R}，x>0\}$，
因此不論 b 值為何，其圖形恆在 y 軸右側，會很靠近 y 軸，但與 y 軸沒有交點

(3) ○：舉例：當 $a=-1$，$b=1$ 時，兩圖形有交點，
如下圖



(4) ╳：將 $y=\log_3 x$ 的 y 坐標均乘上 b 倍，$b>0$ (即以 x 軸為中心，鉛直伸縮為 b 倍)
若可得 $y=\log x$，則表示 $b\cdot\log_3 x=\log x$
$\Rightarrow b\cdot\dfrac{\log x}{\log 3}=\log x$
$\therefore b=\log 3\approx 0.4771>0.4$

(5) ╳：$y=\log x$ 與 $y=10^x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，而
$y=a\cdot 2^x$ 為 $y=2^x$ 的圖形以 x 軸為中心，鉛直伸縮為 a 倍

但 $y=10^x=2^{(\log_2 10)x}=2^{\frac{x}{\log 2}}$ 為 $y=2^x$ 的圖形以 y 軸為中心，水平伸縮為 $\log 2$ 倍，因此無法由 $y=2^x$ 鉛直伸縮得到
故找不到 a 值符合所求

故選(1)(2)(3)。

9. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉、第三冊〈平面向量〉

目標：正餘弦的疊合、向量的內積、正射影長、平行四邊形面積公式、向量的線性組合

解析：(1) ○：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$
$=(\sin 37^\circ,\cos 37^\circ)\cdot(\cos 7^\circ,-\sin 7^\circ)$
$=\sin 37^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 37^\circ\cdot\sin 7^\circ$
$=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 夾角為 θ，則

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\times 1}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=60^\circ$

(2)╳：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=3\sin 37^\circ+4\cos 37^\circ$

$=5\left(\sin 37^\circ\cdot\dfrac{3}{5}+\cos 37^\circ\cdot\dfrac{4}{5}\right)=5\sin(37^\circ+\alpha)$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

因為 $\sin 53.1^\circ\approx 0.8$，得 $37^\circ+\alpha\approx 90.1^\circ\neq 90^\circ$，

所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\neq 5$

(3)╳：$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積為

$|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{2}$

(4)○：$\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長為

$\dfrac{|\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{|3\sin 37^\circ+4\cos 37^\circ|}{1}$

$=|5\sin(37^\circ+\alpha)|$，

$\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為

$\dfrac{|\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{|3\cos 7^\circ-4\sin 7^\circ|}{1}$

$=|4\sin 7^\circ-3\cos 7^\circ|$

$=|5\sin(7^\circ-\beta)|$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

且 $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$

顯然地 $37^\circ+\alpha$ 很接近 90°，故 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長大於 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長

(5)○：因為 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為不平行的兩非零向量，所以坐標平面上的任一向量均可唯一表示為 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的線性組合

故選(1)(4)(5)。

10. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈三角比〉、第三冊〈平面向量〉、第四冊〈空間向量〉

目標：立體圖形、餘弦定理、算幾不等式、柯西不等式

解析：(1)○：在△GHI 中，利用餘弦定理可得

$\overline{GI}=\sqrt{a^2+a^2-2\times a\times a\times\cos 120^\circ}=\sqrt{3}a$

在△AGI 中，利用畢氏定理可知

$\overline{GI}^2+\overline{AG}^2=\overline{AI}^2\Rightarrow 3a^2+b^2=18$

(2)○(3)╳：矩形 $ABHG$ 的面積為 ab，

利用算幾不等式：

$\dfrac{3a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{3a^2b^2}\Rightarrow 9\geq\sqrt{3}ab$

$\Rightarrow ab\leq\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

當等號成立時，$3a^2=b^2\Rightarrow b=\sqrt{3}a$

代入 $ab=3\sqrt{3}$ 得 $a=\sqrt{3}$，$b=3$，

此時六角柱的體積為

(正六邊形 $ABCDEF$ 面積)$\times\overline{AG}$

$=6\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\right)\times b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times 3\times 3=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

(4)╳(5)○：矩形 $ABHG$ 周長為 $2(a+b)$

利用柯西不等式

$(3a^2+b^2)\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2\right)\geq(a+b)^2$

$\Rightarrow 18\times\dfrac{4}{3}\geq(a+b)^2\Rightarrow(a+b)^2\leq 24$

$\Rightarrow 0<a+b\leq 2\sqrt{6}$

所以周長 $2(a+b)\leq 2\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

當等號成立時，$\dfrac{\sqrt{3}a}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{b}{1}\Rightarrow b=3a$

代入 $a+b=2\sqrt{6}$，得 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

此時六角柱的表面積為

$2\times$(正六邊形 $ABCDEF$ 面積)

$+6\times$(矩形 $ABHG$ 面積)

$=2\times\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\right)+6\times(ab)$

$=3\sqrt{3}a^2+6ab$

$=3\sqrt{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+6\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$=\dfrac{9\sqrt{3}+54}{2}$

故選(1)(2)(5)。

11. (2)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第四冊〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換、旋轉矩陣、鏡射矩陣、直線方程式與斜角

解析：(1)╳：$R=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

所有元之和為 $\sqrt{3}$

(2)○：設 $D(x,y)$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}0\\ -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\sqrt{3}\end{bmatrix}$

$\therefore D(2,-2\sqrt{3})$

故直線 CD 的斜率為 $\dfrac{0-(-2\sqrt{3})}{-4-2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)╳：$\because\begin{bmatrix}-4\\ 0\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix}-4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2\sqrt{3}\\ 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a_1=-2\sqrt{3}$，$a_2=2$，故 $a_1a_2=-4\sqrt{3}$

(4) ╳：$B(0\,,-4)$，由(3)知 $A(-2\sqrt{3}\,,2)$

則直線 L 的斜率為

$$\tan\theta=\frac{-4-2}{0-(-2\sqrt{3})}=-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta=-60^\circ<-45^\circ$$

(5) ○：鏡射矩陣 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \cos(-120^\circ) & \sin(-120^\circ) \\ \sin(-120^\circ) & -\cos(-120^\circ) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ s=\frac{1}{2}$$

得 $q+s=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

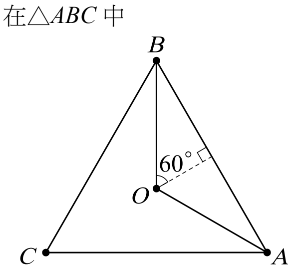
故選(2)(5)。

12. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈三角函數〉

目標：圓與切線、扇形弧長、直線與圓的關係

解析：(1) ○：在△ABC 中



$\because \overline{OB}:\dfrac{\overline{AB}}{2}=2:\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{3}\cdot\overline{OB}$

又 $\overline{AB}=2r$，$\overline{OB}=1+r$

$\therefore 2r=\sqrt{3}(1+r)\Rightarrow(2-\sqrt{3})r=\sqrt{3}$

$\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3+2\sqrt{3}$

(2) ╳：△ABC 的邊長 $2r=6+4\sqrt{3}$，所求為

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6+4\sqrt{3})^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{144+84\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=12+7\sqrt{3}$$

(3) ╳：因為點 P 到直線 OA 的距離最大值為 1

所以△OAP 面積的最大值為

$$\frac{\overline{OA}\times 1}{2}=\frac{[1+(3+2\sqrt{3})]\times 1}{2}=2+\sqrt{3}$$

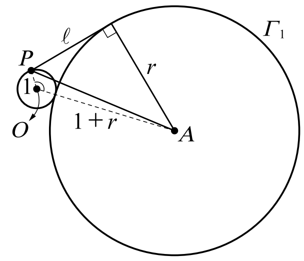
(4) ○：$\angle AOP=\dfrac{2\pi}{3}$ 時，使得 P 點落在 $\overline{OB}$ 或 $\overline{OC}$ 上，

則 P 點所形成圖形的弧長所對應到的圓心角

為 $\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$

所求弧長為 $1\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

(5) ○：由圓的切線性質知



$$\ell=\sqrt{\overline{AP}^2-r^2}$$

$$=\sqrt{(1+r)^2+1-2(1+r)\cos\angle AOP-r^2}$$

$$=\sqrt{2(1+r)(1-\cos\angle AOP)}$$

$$=2\sqrt{1+r}\sin\frac{\angle AOP}{2}=2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sin\frac{\angle AOP}{2}$$

$$=2(1+\sqrt{3})\sin\frac{\angle AOP}{2}$$

將 $\angle AOP=\theta$ 代入得 $\ell=(2+2\sqrt{3})\sin\dfrac{\theta}{2}$

故選(1)(4)(5)。

三、選填題

13. 2.04

出處：第一冊〈指數、對數〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：一次近似(局部特徵)、科學記號表示法

解析：由連續綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l}
-4 & +26 & -57 & +44 & 2 \\
 & -8 & +36 & -42 & \\ \hline
-4 & +18 & -21 & +2 & \\
 & -8 & +20 & & \\ \hline
-4 & +10 & -1 & & \\
 & -8 & & & \\ \hline
-4 & +2 & & &
\end{array}$$

$f(x)=-4x^3+26x^2-57x+44$

$\quad=-4(x-2)^3+2(x-2)^2-(x-2)+2$

故 $g(x)=-(x-2)+2$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=-4(x-2)^3+2(x-2)^2$

可得 $f(1.99)-g(1.99)=-4(-0.01)^3+2(-0.01)^2$

$\quad=0.000204=2.04\times10^{-4}$，故 $a=2.04$。

14. 30

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：級數和公式

解析：因為正三角形堆垛第 k 層所需杯子數量為

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$$

所以 15 層正三角形堆垛所需的香檳杯個數為

$$n=\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\cdots\cdots+\frac{15^2+15}{2}$$

$$=\frac{(1^2+2^2+\cdots\cdots+15^2)+(1+2+\cdots\cdots+15)}{2}$$

$$=\frac{\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}}{2}=\frac{1240+120}{2}=680$$

而堆成一個 12 層的正方形堆垛所需的香檳杯個數為

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+12^2=\frac{12\times13\times25}{6}=\frac{3900}{6}=650$$

故剩餘的香檳杯個數為 $680-650=30$。

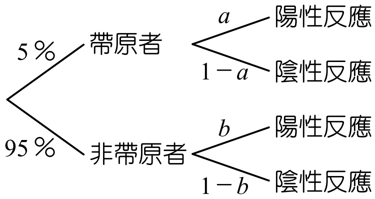
15. 0.95

出處：第四冊〈機率〉

目標：貝氏定理

解析：設 A 型流感帶原者被驗出陽性反應的比例為 a

非帶原者被驗出陽性反應的比例為 b



由貝氏定理可知：

$$\frac{5\%\times a}{5\%\times a+95\%\times b}\geq 90\ \%$$

$$\Rightarrow \frac{5a}{5a+95b}\geq\frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow 50a\geq 45a+855b\Rightarrow a\geq 171b\geq 0$$

而準確率 $x=5\ \%\times a+95\ \%\times(1-b)$

$=(5a+95-95b)\ \%$

$\geq(5(171b)+95-95b)\ \%=(95+760b)\ \%$

$\geq 95\ \%=0.95$

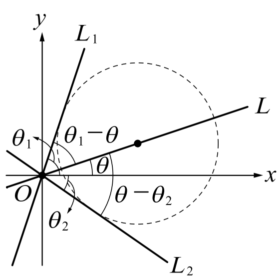
故至少要達到 0.95 以上。

16. $\frac{-9}{13}$

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：兩直線的夾角、斜角

解析：不失一般性，可使交點 P 為坐標原點 O，如下圖



令直線 L 的斜角為 θ，斜率為 $m=\tan\theta=\frac{1}{3}$，

直線 L_1 的斜角為 θ_1，斜率為 $m_1=\tan\theta_1=3$，

直線 L_2 的斜角為 θ_2，斜率為 $m_2=\tan\theta_2$

$\because$ 直線 L_1、L_2 均與圓 C 相切

$\therefore \tan(\theta_1-\theta)=\tan(\theta-\theta_2)$

$$\Rightarrow\frac{\tan\theta_1-\tan\theta}{1+\tan\theta_1\tan\theta}=\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}$$

$$\Rightarrow\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}-m_2}{1+\frac{1}{3}m_2}$$

$$\Rightarrow\frac{9-1}{3+3}=\frac{1-3m_2}{3+m_2}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{1-3m_2}{3+m_2}$$

$$\Rightarrow 12+4m_2=3-9m_2$$

$$\Rightarrow 13m_2=-9$$

$$\Rightarrow m_2=\frac{-9}{13}\text{。}$$

〈另解〉

由題意知 L_1、L_2 對稱於 L，且 L 過原點 O

而直線 L：$y=\frac{1}{3}x$ 的斜率為 $\tan\theta=\frac{1}{3}$，

得 $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{3}{5}$，$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4}{5}$

以 L 作為鏡射軸的鏡射變換矩陣為

$$M=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

令直線 L_1 的方向向量為 $\overrightarrow{v_1}=(1\ ,3)$，

直線 L_2 的方向向量為 $\overrightarrow{v_2}\ /\!/\ (a\ ,b)$

則 $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{5}\\ \frac{-9}{5}\end{bmatrix}$

取 $\overrightarrow{v_2}=(13\ ,-9)$

故直線 L_2 的斜率 $m_2=\frac{-9}{13}$。

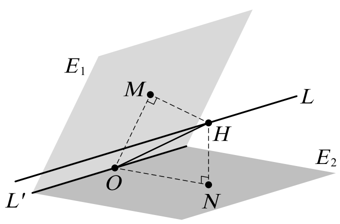
17. $\frac{8\sqrt{3}}{49}$

出處：第三冊〈三角函數〉、第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間概念、三垂線定理、空間中點到直線垂足、兩平面的夾角、二倍角公式

解析：設平面 E_1 與平面 E_2 的交線為 L'，則 $L'\ /\!/\ L$

又因為 O 點在 E_1 及 E_2 上，所以 O 點在直線 L' 上



通過 O 點作 $\overline{OH}\perp L$ 於 H 點，並且通過 H 點作 $\overline{HM}\perp E_1$ 於 M 點，$\overline{HN}\perp E_2$ 於 N 點

由 $L\ /\!/\ L'$ 可知 $\overline{OH}\perp L'$，

因此 $\overline{OM}\perp L'$，$\overline{ON}\perp L'$ (三垂線定理)，

又 $\overline{HM}=d(L\ ,E_1)=4\sqrt{3}$，$\overline{HN}=d(L\ ,E_2)=4\sqrt{3}$

$\Rightarrow\triangle HOM\cong\triangle HON$ (RHS 全等)

令 $H(5+3t\ ,5+2t\ ,4-2t)$，

取 $\overrightarrow{v}=(3\ ,2\ ,-2)$ 為 L 的方向向量

$\because\overline{OH}\perp L$

$\therefore 0=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{v}$

$=3(5+3t)+2(5+2t)-2(4-2t)=17t+17$

$\Rightarrow t=-1$

$\therefore H(2\ ,3\ ,6)$　$\therefore\overline{OH}=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

設 $\angle MON=\phi\Rightarrow\angle HOM=\angle HON=\frac{\phi}{2}$

在 $\triangle HOM$ 中，$\sin\frac{\phi}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$$\Rightarrow\cos\frac{\phi}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}$$

$\therefore \sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} = 2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{7} = \frac{8\sqrt{3}}{49}$

平面 E_1、E_2 的夾角為 ϕ 或 $\pi-\phi$，即 $\theta=\phi$ 或 $\pi-\phi$，

且 $\sin(\pi-\phi)=\sin\phi=\frac{8\sqrt{3}}{49}$

故 $\sin\theta=\frac{8\sqrt{3}}{49}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數函數的判讀、指數律的計算

解析：設初始現金均為 P

依題意可知：$A=\frac{P\left[1-(1-5\%)^{11}\right]}{5\%}$，

$B=\frac{P\left[1-(1-10\%)^{11}\right]}{10\%}$

則 $\frac{B}{A}=\frac{\frac{P\left[1-(1-10\%)^{11}\right]}{10\%}}{\frac{P\left[1-(1-5\%)^{11}\right]}{5\%}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\left[1-(0.9)^{11}\right]}{\left[1-(0.95)^{11}\right]}$

$\approx\frac{1}{2}\times\frac{0.686}{0.431}\approx 0.796$

故選(4)。

19. 說明略，50 %

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式方程式的運算與求解

解析：設存款準備率為 r，則依題意可列式：

$\frac{P\left[1-(1-r)^3\right]}{r}=\frac{7}{4}P$

$\Rightarrow 4\left[1-(1-3r+3r^2-r^3)\right]=7r$

$\Rightarrow 4r^3-12r^2+5r=0$

$\Rightarrow r(4r^2-12r+5)=0$

$\Rightarrow r(2r-1)(2r-5)=0$

$\Rightarrow r=0$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$

但由於 r 為不超過 100 %的正實數

故 $r=\frac{1}{2}=50\%$。

◎評分原則

設存款準備率為 r，則依題意可列式：

$\frac{P\left[1-(1-r)^3\right]}{r}=\frac{7}{4}P$ (2 分)

$\Rightarrow 4\left[1-(1-3r+3r^2-r^3)\right]=7r$

$\Rightarrow 4r^3-12r^2+5r=0$

$\Rightarrow r(4r^2-12r+5)=0$

$\Rightarrow r(2r-1)(2r-5)=0$

$\Rightarrow r=0$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$ (2 分)

但由於 r 為不超過 100 %的正實數

故 $r=\frac{1}{2}=50\%$。 (2 分)

20. $f(x)=-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4$，否，說明略

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的運算、三次函數的圖形特徵

解析：$M=\frac{P\left[1-(1-r)^4\right]}{r}$，$N=\frac{P\left[1-(1-xr)^4\right]}{xr}$，

故 $\frac{N}{M}=\frac{1}{x}\times\frac{1-(1-xr)^4}{1-(1-r)^4}$

$=\frac{1}{x}\times\frac{4rx-6r^2x^2+4r^3x^3-r^4x^4}{1-(1-r)^4}$

$=\frac{r}{1-(1-r)^4}\times(-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4)$，

即 $f(x)=-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4$

而三次函數圖形對稱中心的 x 坐標為

$x=-\frac{4r^2}{3\times(-r^3)}=\frac{4}{3r}$，

代入 $y=f(x)$ 可得

y 坐標 $=f\left(\frac{4}{3r}\right)$

$=-r^3\left(\frac{4}{3r}\right)^3+4r^2\left(\frac{4}{3r}\right)^2-6r\left(\frac{4}{3r}\right)+4$

$=-\frac{64}{27}+\frac{64}{9}-8+4$

$=\frac{20}{27}$

因此 $y=f(x)$ 圖形對稱中心的 y 坐標必為定值，也就是對稱中心的 y 坐標不隨著 r 的變動而改變。

◎評分原則

$M=\frac{P\left[1-(1-r)^4\right]}{r}$，$N=\frac{P\left[1-(1-xr)^4\right]}{xr}$，

故 $\frac{N}{M}=\frac{1}{x}\times\frac{1-(1-xr)^4}{1-(1-r)^4}$ (2 分)

$=\frac{1}{x}\times\frac{4rx-6r^2x^2+4r^3x^3-r^4x^4}{1-(1-r)^4}$

$=\frac{r}{1-(1-r)^4}\times(-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4)$，

即 $f(x)=-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4$ (2 分)

而三次函數圖形對稱中心的 x 坐標為

$x=-\frac{4r^2}{3\times(-r^3)}=\frac{4}{3r}$，

代入 $y=f(x)$ 可得

y 坐標 $=f\left(\frac{4}{3r}\right)=-r^3\left(\frac{4}{3r}\right)^3+4r^2\left(\frac{4}{3r}\right)^2-6r\left(\frac{4}{3r}\right)+4$

$=-\frac{64}{27}+\frac{64}{9}-8+4=\frac{20}{27}$

因此 $y=f(x)$ 圖形對稱中心的 y 坐標必為定值，也就是對稱中心的 y 坐標不隨著 r 的變動而改變。 (2 分)