全國高中 114 年(113 學年度)高三上
第四次聯合模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 試利用乘法公式：$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$來估計 $\sqrt{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$ 的近似值最接近下列哪一個選項？
(1) 0.628　(2) 0.682　(3) 1.318　(4) 1.381　(5) 1.813

答：(3)

解：$\left.\begin{array}{l} xy=\sqrt{3} \\ yz=-\sqrt{2} \\ zx=-\sqrt{6} \end{array}\right\} \xrightarrow[\Rightarrow xyz=\pm\sqrt{6}]{x^2y^2z^2=6} \begin{cases} x=\mp\sqrt{3} \\ y=\mp 1 \\ z=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

所求$=\sqrt{\left(\mp\sqrt{3}\mp 1\pm\sqrt{2}\right)^2}=\left|\mp\sqrt{3}\mp 1\pm\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\approx 1.318$

2. 若有一組數據資料 X，此組數據含有 2024 筆資料 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2024}$，其算術平均數為 $\mu_x=16$，標準差 $\sigma_x=12$、若現在有另一組數據資料 Y，且 Y 的 2024 筆資料 $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{2024}$ 滿足 $y_i=\frac{1}{8}x_i^2-3x_i+11$，其中 $i=1,2,3,\cdots,2024$，則數據資料 Y 的算術平均數為何？
(1) 91　(2) 13　(3) -5　(4) -7　(5) -9

答：(2)

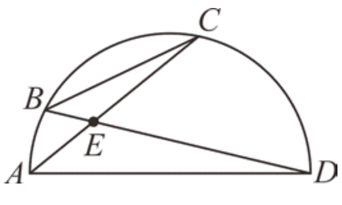
解：$\mu_x=\frac{1}{2024}\sum x_i=16\Rightarrow\sum x_i=16\times 2024$

$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{2024}\sum x_i^2-16^2}=12\Rightarrow\sum x_i^2=400\times 2024$

$\mu_y=\frac{1}{2024}\sum\left(\frac{1}{8}x_i^2-3x_i+11\right)$

$=\frac{1}{2024}\left(\frac{1}{8}\times 400\times 2024-3\times 16\times 2024+11\times 2024\right)=13$

3. 如右圖，半圓上有四點 A、B、C、D，其中 $\overline{AD}$ 為直徑，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於點 E。已知 $\overline{BC}=5$、$\overline{AD}=8$，試求 $\sin\angle CED$ 之值為下列哪一個選項？



(1) $\frac{3}{8}$　(2) $\frac{5}{13}$　(3) $\frac{5}{8}$　(4) $\frac{\sqrt{39}}{8}$　(5) $\frac{\sqrt{55}}{8}$

答：(4)

$\boxed{解}$：$\dfrac{5}{\sin\angle BDC}=8\Rightarrow\sin\angle BDC=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\cos\angle BDC=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$

$\sin\angle CED\xrightarrow{\angle ACD=90^\circ}\sin\left(90^\circ-\angle BDC\right)=\cos\angle BDC=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$

4. 有 8 位學生數學成績（單位：分）分別為 30，70，60，50，30，40，50，90，此 8 人數學成績的中位數為 M 分。現在從中任意選取 3 人，則此 3 人數學成績的中位數仍為 M 分的方法數有多少種？
(1) 11 種　(2) 15 種　(3) 18 種　(4) 24 種　(5) 33 種

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：30、30、40、50、50、60、70、90，中位數 50

方法數$=C_2^2C_1^6+C_1^2C_1^3C_1^3=6+18=24$

5. 下列五個選項中的方程式各代表空間中的兩條直線，試問：哪個選項的兩直線，恰只有一條公垂線？（註：公垂線是指同時垂直兩直線的直線）

(1) $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+y-2=0\\x+y=0\end{cases}$ 與 $\begin{cases}3x-y=0\\x-y=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-y+1=0\\y+z-3=0\end{cases}$ 與 $\begin{cases}x-3y+13=0\\2x-6y+z+1=0\end{cases}$

(4) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ 與 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$

(5) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 與 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：(1)(2)(4)兩平行線，有無限多條公垂線
(5)兩重合線，有無限多條公垂線
(3)兩歪斜線，有一條公垂線

6. 坐標空間中有一個三角形 ABC，已知 $A(1,2,3)$、$B(2,0,5)$，且 $\overline{AC}=2$。若 D 點在 $\overline{BC}$ 上且滿足 $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$，則 $\overline{AD}$ 的範圍為 $a<\overline{AD}<b$，試問 $a+b$ 之值為下列哪一個選項？
(1) 1　(2) $\dfrac{4}{3}$　(3) 2　(4) 3　(5) 4

$\boxed{答}$：(5)

$\boxed{解}$：$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，令 $A(0,0)$，$C(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$B(3,0)$

$\overline{CD}:\overline{DB}=2:1\Rightarrow D\left(\dfrac{2\cos\theta+6}{3},\dfrac{2\sin\theta}{3}\right)\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{\dfrac{40+24\cos\theta}{9}}$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{40-24}{9}}<\overline{AD}<\sqrt{\dfrac{40+24}{9}}\Rightarrow\dfrac{4}{3}<\overline{AD}<\dfrac{8}{3}$

二、多選題

7. 右圖為三位數 $9ab$ 乘以 7 的乘法直式計算，其中 a,b,c,d,e,f 皆為 0 到 9 的整數。請選出正確的選項。

$$\begin{array}{rcccc} & & 9 & \boxed{a} & \boxed{b} \\ \times) & & & & 7 \\ \hline & \boxed{c} & \boxed{d} & \boxed{e} & \boxed{f} \end{array}$$

(1) c 值必定為 6
(2) $b+f$ 之值必定為偶數
(3) d 值的可能值有 10 個
(4)若從所有乘積結果（即四位數 $cdef$ ）中任取一數，則取到 $d=6$ 的機率為 $\frac{1}{10}$
(5)若從所有乘積結果（即四位數 $cdef$ ）中任取一數，已知在 $d=6$ 的條件下，則 $e=5$ 的機率為 $\frac{2}{15}$

答：(1)(2)(5)
解：(1) $900\times7=6300$ 、 $999\times7=6993\Rightarrow c$ 必為 6
(2) b 、 f 必同奇同偶 $\Rightarrow b+f$ 必為偶
(3)承(1)， d 只能 $3\sim9$ ，共 7 數
(4) $6600=7\times942.\cdots$ 、 $6700=7\times951.\cdots\Rightarrow$ 機率 $=\frac{15}{100}=\frac{3}{10}$ (4)(5)

8. 設 a 、 b 為兩非零實數，考慮坐標平面上 Γ_1 ： $y=a\cdot2^x$ ， Γ_2 ： $y=b\cdot\log_3 x$ 兩圖形，請選出正確的選項。
(1)可以找到 a 值，使得 Γ_1 圖形凹口向下
(2)不論 b 為何值， Γ_2 的圖形與 y 軸均沒有交點
(3)可以找到 a 、 b 之值，使得 Γ_1 、 Γ_2 兩圖形有交點
(4)若 Γ_2 的圖形與 $y=\log x$ 的圖形重合，則 $0<b<0.4$
(5)可以找到正實數 a ，使得 Γ_1 的圖形與 $y=\log x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

答：(1)(2)(3)
解：(1) $a<0$ 時可成立
(2)以 y 軸為漸近線
(3) $a<0$ 、 $b>0$ 即可成立
(4) $\log x=b\log_3 x\Rightarrow b=\log3\approx0.4771$
(5) $10^x=a\cdot2^x\Rightarrow a=5^x$ （非定實數）

9. 坐標平面上，有三個非零向量 $\overrightarrow{a}=(\sin37°,\cos37°)$ 、 $\overrightarrow{b}=(\cos7°,-\sin7°)$ 、 $\overrightarrow{c}=(3,4)$ 。關於這三個向量的敘述，請選出正確的選項。
(1)向量 $\overrightarrow{a}$ 與向量 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $60°$
(2)內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ 之值為 5
(3)兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積小於 $\frac{1}{2}$
(4)向量 $\overrightarrow{c}$ 在向量 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長大於向量 $\overrightarrow{c}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長
(5)若將向量 $\overrightarrow{c}$ 表示成兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的線性組合形式，即 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中 x 、 y 為實數，則數對 (x,y) 僅有一組解

答：(1)(4)(5)

解：(1) $\overrightarrow{a}=\left(\cos53°,\sin53°\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(\cos\left(-7°\right),\sin\left(-7°\right)\right)\Rightarrow$ 夾角 $60°$

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=3\cos53°+4\sin53°<5$

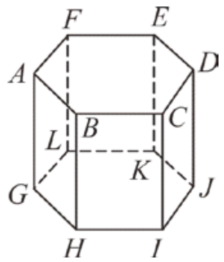
(3) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$所圍平行四邊形面積$=1\times1\times\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\overrightarrow{c}$在$\overrightarrow{a}$上的正射影長$=3\cos53°+4\sin53°\approx5\sin90°$

$\overrightarrow{c}$在$\overrightarrow{b}$上的正射影長$=3\cos\left(-7°\right)+4\sin\left(-7°\right)\approx5\sin30°$

(5) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$可作基底

10. 如右圖，六角柱 $ABCDEF-GHIJKL$ 之上底面 $ABCDEF$ 與下底面 $GHIJKL$ 為兩個全等的正六邊形，側面為六片全等的矩形，且上、下底面的正六邊形與側面矩形皆垂直。設 $\overline{AB}=a$、$\overline{AG}=b$、$\overline{AI}=3\sqrt{2}$，請選出正確的選項。



(1) $3a^2+b^2=18$

(2)矩形 $ABHG$ 的面積有最大值為 $3\sqrt{3}$

(3)矩形 $ABHG$ 的面積有最大值時，六角柱 $ABCDEF-GHIJKL$ 的體積為 $27\sqrt{3}$

(4)矩形 $ABHG$ 的周長有最大值為 $2\sqrt{6}$

(5)矩形 $ABHG$ 的周長有最大值時，六角柱 $ABCDEF-GHIJKL$ 的表面積為 $\dfrac{9\sqrt{3}+54}{2}$

答：(1)(2)(5)

解：(1) $\overline{GI}=\sqrt{3}a$，$\overline{AI}=\sqrt{b^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2}=3\sqrt{2}\ \Rightarrow 3a^2+b^2=18$

(2)(3) $\dfrac{3a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{3a^2b^2}\ \Rightarrow 9\geq\sqrt{3}ab\ \Rightarrow ab\leq3\sqrt{3}$

等號成立於 $3a^2=b^2\ \Rightarrow b=\sqrt{3}a=3$，體積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\times6\times b=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

(4)(5) $\left[3a^2+b^2\right]\left[\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(2\right)^2\right]\geq\left[2a+2b\right]^2\ \Rightarrow 2a+2b\leq4\sqrt{6}$

等號成立於 $b=3a=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，

表面積 $6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\times2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\times6=\dfrac{9\sqrt{3}+54}{2}$

11. 坐標平面上，設以原點 O 為中心，逆時針旋轉 $30°$ 的旋轉矩陣為 R，已知直線 L 過 $A\left(a_1,a_2\right)$、$B\left(0,-4\right)$兩點，斜角為 θ，其中 $-90°<\theta<90°$。若 A、B 兩點經 R 變換後依序為 $C\left(-4,0\right)$、D 兩點，請選出正確的選項。

(1)矩陣 R 的所有元之和為 1　　(2)直線 CD 的斜率為 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $a_1a_2=-6\sqrt{3}$　　(4) $\theta>-45°$

(5)設直線 L' 通過原點且與 L 平行，若以 L' 為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$，則 $q+s=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

答：(2)(5)

解：$\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & x_0 \\ 0 & y_0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_0=2$，$y_0=-2\sqrt{3}$，$a_1=-2\sqrt{3}$，$a_2=2$

(1)應為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

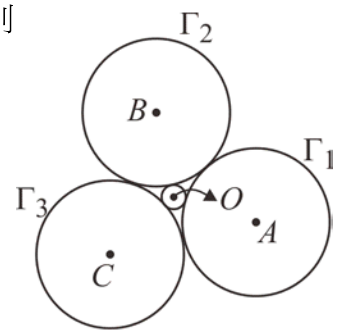
(2) $C(-4,0)$，$D(2,-2\sqrt{3})$，斜率 $m_{CD}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $a_1\times a_2=-4\sqrt{3}$

(4)斜率 $m_{AB}=-\sqrt{3}=\tan 120^\circ=\tan(-60^\circ)$

(5) $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & +\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\Rightarrow q+s=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

12. 如右圖，平面上有以 A、B、C、O 四點為圓心的四個圓，分別記作圓 Γ_1、圓 Γ_2、圓 Γ_3、圓 Γ。其中圓 Γ_1、圓 Γ_2、圓 Γ_3 的半徑均為 r，圓 Γ 之半徑為 1，且滿足 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2r$，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1+r$。若圓 Γ 上有一點 P，使得 $\angle AOP=\theta$，$0\le\theta\le\pi$。請選出正確的選項。



(1) $r=3+2\sqrt{3}$

(2) ΔOAB 的面積為 $\dfrac{12+7\sqrt{3}}{4}$

(3)若 $0<\theta<\pi$，則 ΔOAP 面積的最大值為 $\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

(4)滿足 $\dfrac{2\pi}{3}\le\theta\le\pi$ 的所有點 P 所形成的圖形為一圓弧，則其弧長為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(5)當 $0<\theta\le\pi$ 時，若自點 P 作圓 Γ_1 的切線長為 ℓ，則 $\ell=(2+2\sqrt{3})\sin\dfrac{\theta}{2}$

答：(1)(4)(5)

解：(1) $(1+r)\times\sqrt{3}=2r\Rightarrow r=2\sqrt{3}+3$

(2) ΔOAB 面積 $=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{3}+4)^2\sin 120^\circ=12+7\sqrt{3}$

(3) ΔOAP 最大面積 $=\dfrac{1}{2}\times 1\times(2\sqrt{3}+4)\sin 90^\circ=2+\sqrt{3}$

(4)弧長$=1\times\left(\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

(5) $P(\cos\theta,\sin\theta)\Rightarrow\Gamma_1:\left(x-2\sqrt{3}-4\right)^2+y^2=\left(2\sqrt{3}+3\right)^2$

$$\Rightarrow \ell=\sqrt{\left(\cos-2\sqrt{3}-4\right)^2+\sin^2\theta-\left(2\sqrt{3}+3\right)^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}\sqrt{1-\cos\theta}$$

$$=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}=\left(2\sqrt{3}+2\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

三、選填題

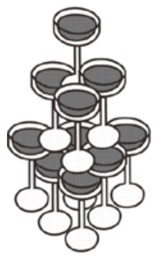
13.若三次多項式 $f(x)=-4x^3+26x^2-57x+44$ 在 $x=2$ 附近的圖形會近似於一次函數 $y=g(x)$，若 $f(1.99)-g(1.99)$ 的值可表示為科學記號 $a\times10^n$，其中 $1\le a<10$，n 為整數，試求 $a=$________。

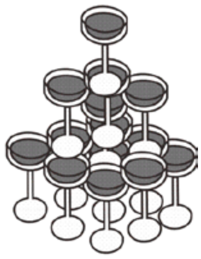
答：2.04

解：$f(x)=-4(x-2)^3+2(x-2)^2-(x-2)+2\Rightarrow g(x)=-(x-2)+2$

則 $f(1.99)-g(1.99)=-4(-0.01)^3+2(-0.01)^2=2.04\times10^{-4}$

14.第 35 屆金曲獎於 2024 年 6 月 29 日在臺北小巨蛋舉行，倘若今年主辦單位在頒獎典禮結束後，提供給金曲歌王、金曲歌后若干個香檳杯來堆成一座香檳杯金字塔（香檳杯堆垛）以辦理慶功宴，其中常見的堆垛方式有兩種，如圖(一)、圖(二)。圖(一)為正三角形堆垛，第一層有 1 個香檳杯，第二層有 3 個香檳杯，第三層有 6 個香檳杯，……，以此類推；圖(二)為正方形堆垛，第一層有 1 個香檳杯，第二層有 4 個香檳杯，第三層有 9 個香檳杯，……，以此類推。若原本主辦單位計畫以圖(一)的堆垛方式堆成香檳杯金字塔，而購進的 n 個香檳杯恰好可堆成一座 15 層的正三角形堆垛，但金曲歌王、金曲歌后的經紀人討論到，若以正三角形堆垛，高度太高，而想改成圖(二)的正方形堆垛，因此主辦單位將所購進的 n 個香檳杯，堆成一個 12 層的正方形堆垛，此時會剩餘________個香檳杯。


圖(一)


圖(二)

答：30

解：$(1)+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+15)=\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(1+2+\ldots+k)$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{15\times16\times17}{3}=680$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\le680\Rightarrow n\le12.\cdots$$

則 $680-\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k^2=680-650=30$

15. 已知青銀共居社區有5%的居民為A型流感確診帶原者，設某快篩試劑檢驗A型流感病毒的準確率為x，針對該疾病而言，準確率的定義如下：
「帶原者中檢測出陽性反應比例加上非帶原者中檢測出陰性反應比例占全體的比例」。
麟洋以此快篩試劑檢驗此社區住戶，若希望檢驗呈陽性反應的人，確實是帶原者的比例達到九成（含）以上，則準確率x至少要達到________以上。

答：0.95

解：$\begin{cases} 帶原\frac{1}{20}\begin{cases}陽a\\ 陰1-a\end{cases} \\ 非帶原\frac{19}{20}\begin{cases}陽b\\ 陰1-b\end{cases}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{20}a}{\frac{1}{20}a+\frac{19}{20}b} \geq \dfrac{9}{10} \Rightarrow a \geq 171b \geq 0$

故$x=\dfrac{1}{20}a+\dfrac{19}{20}(1-b) \geq \dfrac{19+152b}{20} \geq \dfrac{19}{20}=0.95$

16. 坐標平面上，已知圓C的圓心落在直線L：$y=\dfrac{1}{3}x$上，且有另兩條直線L_1、L_2均與圓C相切，若三相異直線L、L_1、L_2同時交於一點P，且直線L_1的斜率為 3，則直線L_2的斜率為________。（化為最簡分數）

答：$-\dfrac{9}{13}$

解：$\tan\theta=\dfrac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}-m}{1+\frac{1}{3}m} \Rightarrow m=-\dfrac{9}{13}$

17. 坐標空間中，設O為坐標原點及一直線L：$\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$，若有兩相異平面$E_1$、$E_2$均與直線$L$平行且均通過$O$點。已知直線$L$到兩平面$E_1$、$E_2$的距離皆為$4\sqrt{3}$，且平面$E_1$、$E_2$的夾角為$\theta$，試求$\sin\theta=$________。（化為最簡根式）

答：$\dfrac{8\sqrt{3}}{49}$

解：L'：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-2}$，$d\left((5,5,4),L'\right)=7$

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{7} \Rightarrow \sin\theta=2\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)\left(\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{8\sqrt{3}}{49}$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

「存款準備率」是一個不超過100%的正實數，當銀行收到存款時，必須至少保留部分比例的現金不得動支，該比例稱為「存款準備率」。舉例而言：當存款準備率為10%時，某銀行收到A公司 1000 萬元的存款，則必須保留 100 萬元之現金，另外 900 萬元可用於貸款業務；此時，若B公司至該銀行貸款此 900 萬元之後，又全部存入同一間銀行，則該銀行必須保留

90 萬元的現金，剩餘的 810 萬元可用於貸款業務。因此，在帳面上，A 公司在銀行有存款 1000 萬元，而 B 公司有存款 900 萬元，故該銀行在帳面上的存款總額為 1900 萬元，我們稱此 1900 萬元為「當存款準備率為10% 時，初始現金 1000 萬元經貸款操作 1 次的帳面上存款總額」。

由上述資訊可知，當存款準備率為 r 時，初始現金 P 元經貸款操作 n 次後，其帳面上的存款總額為 $\dfrac{P\left[1-(1-r)^{n+1}\right]}{r}$ 元。試回答下列問題。

18. 設在相同初始現金，且在經貸款操作 10 次的情況下，當存款準備率分別為 5%、10% 時，所對應的帳面上存款總額分別為 A 元、B 元，試問：$\dfrac{B}{A}$ 之值最接近下列哪一個選項？（單選題） (1) 0.5　(2) 0.6　(3) 0.7　(4) 0.8　(5) 0.9

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$\dfrac{B}{A}=\dfrac{\dfrac{P\left[1-(1-10\%)^{11}\right]}{10\%}}{\dfrac{P\left[1-(1-5\%)^{11}\right]}{5\%}}\approx\dfrac{1-0.314}{1-0.569}\times\dfrac{1}{2}\approx 0.8$

19. 若初始現金 P 元經貸款操作兩次後，其帳面上的存款總額為 $\dfrac{7}{4}P$，請問此時該銀行的存款準備率為多少？請詳細說明並以百分比表示答案。

$\boxed{答}$： 50%

$\boxed{解}$：$\dfrac{P\left[1-(1-r)^{3}\right]}{r}=\dfrac{7}{4}P\xrightarrow{0<r<1}r=\dfrac{1}{2}$

20. 當銀行的存款準備率為 r 時，初始現金 P 元經貸款操作三次後，其帳面上的存款總額為 M；若該銀行將存款準備率調整為 xr 時（x 為正實數），初始現金 P 元經貸款操作三次後，其帳面上的存款總額變為 N。已知 $\dfrac{N}{M}$ 可以表示為 $\dfrac{r}{1-(1-r)^4}\cdot f(x)$，其中 $f(x)$ 是 x 的三次多項式。試求三次多項式 $f(x)$（x 為正實數），並說明函數 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心之 y 坐標是否會隨著存款準備率 r 的不同而改變？請詳細說明理由。

$\boxed{答}$：對稱中心的 y 座標恆為 $\dfrac{20}{27}$

$\boxed{解}$：$\dfrac{N}{M}=\dfrac{\dfrac{P\left[1-(1-xr)^{4}\right]}{xr}}{\dfrac{P\left[1-(1-r)^{4}\right]}{r}}=\dfrac{r}{1-(1-r)^{4}}\times f(x)$

故 $f(x)=-r^3x^3+4r^2x^2-6rx+4\Rightarrow$ 對稱中心 $\left(\dfrac{4}{3r},\dfrac{20}{27}\right)$