全國公私立高中 114 學年度第四次學測模擬考數學 A(南一)

RA4109

第壹部分：選擇題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

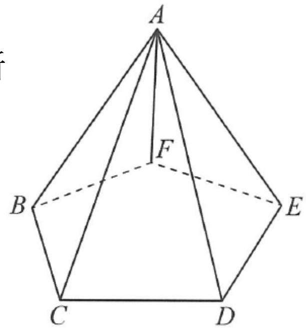
1. 已知多項式 $f(x)=x^{100}-2x^{92}+3x^{41}+ax^3+b$ 若 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 4， $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 6。試問 a^3+b^3 之值為何？(1)152　(2)280　(3)10　(4)8　(5)-8

2. 給定一區域 $\begin{cases} L_1: y\le -1 \\ L_2: 2x+y\ge 3 \\ L_3: 6x+y\le 23 \end{cases}$ ，若將題目 L_1 看錯成 $y\le k$ ，而新面積比舊面積多 18，試問實數 k 的值為何？ (1)5　(2)4　(3)3　(4)2　(5)1

3. 已知 a、b 皆為正實數，函數 $f(x)=x^3-3ax^2+b$ 圖形中恰有兩處的一次近似為水平線，且其中一條水平線為 x 軸。試問此函數的對稱中心會在下列哪一個函數圖形上？
(1) $y=x^3$　(2) $y=2x^3$　(3) $y=-2x^3$　(4) $y=3x^3$　(5) $y=-3x^3$

4. 設 α 為 $2^{x-1}+x-6=0$ 的實根， β 為 $\log_2(x-1)+x-6=0$ 的實根，試問 $\alpha+\beta$ 之值為何？
(1)3　(2)4　(3)5　(4)6　(5)7

5. 如圖(1)在五角錐 $A-BCDEF$ 的所有頂點中，任取 2 點連成的所有直線中，試問互為歪斜的直線共有幾對？(例如：直線 AB 和直線 DF 互為歪斜線)
(1)15 對　(2)20 對　(3)30 對
(4)40 對　(5)45 對



圖(1)

6. 給定一遞迴數列 $\begin{cases} a_1=\log_2\dfrac{11}{12} \\ a_n-a_{n-1}=\log_2\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}, n\ge 2 \end{cases}$ ，若已知 $a_k=\log_2\dfrac{1}{3}$ ，試問正整數 k 的值為何？ (1)11　(2)12　(3)22　(4)24　(5)36

二、多選題(占 30 分)

7. 某公司有 n 個人，對其編號 1 至 n，欲調查每人本週使用手機的小時數，記錄成一組二維數據 (X,Y)。其中 X 為編號，Y 為小時數，例如：(2, 7.8)代表編號 2 的人本週使用手機 7.8 小時。已知 X 的第 70 百分位數為 37；Y 的算術平均數為 9.2 小時，標準差為 2 小時，第 1 四分位數為 8 小時，第 3 四分位數為 11 小時。試選出正確的選項。
(1)此公司有 52 個人　(2)Y 的中位數為 9.5 小時　(3)公司所有人本週使用手機總時數為 478.4 小時　(4)若編號 1 的人本週使用手機 6 小時，則使用手機時數的標準化數據為 -1.6
(5)若 Y 的數據為 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ ，a 為任意實數，則 $(y_1-a)^2+(y_2-a)^2+\cdots+(y_n-a)^2\ge 208$

8. 台灣彩券發行一款遊戲「BINGO BINGO 賓果賓果」：每五分鐘開一期，每期開獎時，電腦系統將從 01~80 號隨機開出 20 個獎號。基本玩法為投注者從 01~80 號任意選擇 1 個至 10 個號碼(稱為「一星」、「二星」、⋯、「十星」)，並將自己選擇的號碼與電腦系統開出的 20 個獎號進行對獎。投注者每一注不論選幾個號碼皆為 25 元。前陣子網路流行一種爆紅玩法「四星電選四倍十期」，以下解釋各名詞意思：
1.「四星」為一注選擇 4 個號碼，一注一期獎金對照表如下表(1)　(尚未考慮倍率)。
2.「電選」為由電腦自動從 01~80 選擇號碼。
3.「四倍」為倍率 4 倍(投注金額及獎金皆變 4 倍)。
4.「十期」為同組號碼可重複對獎 10 期。以此題為例，因每注 25 元，下注倍率 4 倍則一

注變為 100 元，又同一注號碼可連續對獎 10 期，因此下注一次「四星電選四倍十期」為 1,000 元。依據以上「四星電選四倍十期」說明，試選出正確的選項。

表(1)

玩法	獎號對中情形	單注獎金（元）
四星	中 4 個號碼	1000
	中 3 個號碼	100
	中 2 個號碼	25
	中 1 個號碼	0
	中 0 個號碼	0

(1)每一期電腦系統開出的 20 個號碼中，至少有 5 個偶數的組合數為 $C_5^{40}C_{15}^{75}$

(2)每一期對中 4 個號碼的機率小於 $\dfrac{1}{256}$

(3)每一期得不到獎金的機率小於 $\dfrac{81}{256}$ (4)每一期中 1 個號碼的機率為 P_1，中 3 個號碼的機率為 P_3，則 $\dfrac{P_1}{P_3}$ 之值四捨五入至整數位為 10 (5)下注一次「四星電選四倍十期」最多可拿到獎金 40000 元

9. 設 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ ， $g(x)=\sqrt{3}$ ，試選出正確的選項。

(1) $y=f(x)$ 的函數圖形週期為 2π (2)直線 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 為 $y=f(x)$ 函數圖形的其中一條對稱軸 (3)若 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的函數圖形交於 P、Q 兩點，其中 $0<x<\pi$ ，則 $\overline{PQ}=\dfrac{\pi}{6}$

(4)當 $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$ 時， $y=f(x)$ 的值域為 $[0,\sqrt{3}]$ (5) $y=2\cos 2x$ 的函數圖形經過平移後，可與 $y=f(x)$ 的函數圖形重合

10. 給定平面上三點 $A(-2,-4)$ 、 $B(-1,5)$ 、 $C(3,-3)$ 及直線 $L: y=mx$ ，且 $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AB}+(2-k)\,\overrightarrow{AC}$ 其中 $0<k<2$ 。試選出正確的選項。

(1)$\triangle ABC$ 的面積為 44 (2)若$\triangle ABP$ 的面積為$\triangle ABC$ 面積的 $\dfrac{3}{5}$ 倍，則 $k=\dfrac{7}{5}$

(3)若 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 在直線 L 上的正射影相同，則 $m=\dfrac{1}{2}$ (4)承(3)，若 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 L 的銳夾角為 θ ，則 $\cos\theta=\dfrac{11}{\sqrt{410}}$ (5)若$\triangle ABC$ 的內切圓與 $\overline{BC}$ 切於 R 點，則 $\overrightarrow{AR}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

11. 已知空間坐標中三個相異非零向量 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ ， $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$ ， $\overrightarrow{OC}=(x_3,y_3,z_3)$ ，考慮三階方陣 $M=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1)若 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 都在 xy 平面上，且內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\neq 0$

(2)若 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 都在 xy 平面上，且 $\overrightarrow{OC}$ 可以表示為 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合，則 z_3 的值可能不是 0 (3)若 $\overrightarrow{OC}\perp(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$ ，則 M 的三階行列式 det(M)=0

(4)$\triangle ABC$ 的面積等於 $\dfrac{1}{2}|\det(M)|$

(5)設 $\overrightarrow{OD}$ 為空間中任意向量，若 $\overrightarrow{OD}$ 可以表示成 $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的線性組合，則 $\det(M)\neq 0$

12. 設矩陣 $B=\begin{bmatrix}5 & -25\\ -1 & 5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 且 $A=kB+C$，其中 k 為實數。若矩陣 A 為逆時針旋轉 θ 的旋轉矩陣，試選出正確的選項。(1) $k=-\dfrac{1}{13}$　(2) 設點 P 坐標為(1, 0)，而 P 坐標經過 3 次矩陣 A 的線性變換得到新坐標 P'，則 P' 在第三象限　(3)矩陣 A^4C^2 不是旋轉矩陣　(4)矩陣 A^4C 是鏡射矩陣　(5) $\dfrac{(C^2+C^{-1})^2}{4}$ 是轉移矩陣

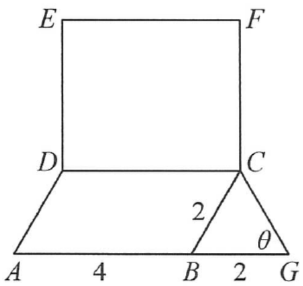
三、選填題(占 25 分)

13. 設 x，y 為實數，已知 $x+2y=2$，試求 2^x+4^y 之最小值為________。

14. 坐標平面上，設動點 $P(x,y)$ 在圓 $C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上移動，動點 $Q(a,b)$ 在圓 $x^2+y^2=1$ 上移動。當 $ax+by$ 有最大值 M 時，此時 P 點坐標為 (x_0,y_0)，Q 點坐標為 (a_0,b_0)，設 $N=x_0+y_0+a_0+b_0$，試求數對 (M,N) 之值為__________。
(化為最簡分數)

15. $\triangle ABC$ 中滿足 $\sin A:\sin B:\sin(A+B)=2:3:4$，試求 $\cos(A-B)$ 的值為_________。
(化為最簡分數)

16. 如圖(2)，在坐標平面上將平行四邊形 $ABCD$ 之 $\overline{CD}$ 邊向外作正方形 $CDEF$，且 A、B、G 三點共線，$\overline{BC}=\overline{BG}$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2$。設 $\angle BGC=\theta$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FG}$ 之最小值為__________。(化為最簡根式)



圖(2)

17. L_1、L_2 是空間中兩條平行的直線，L_1 的方向向量為 $(a,1,c)$，L_2 的方向向量為 $(c,b,2)$，且 $abc\neq 0$。現有 A、B 兩點在 L_1 上，且兩點的 y 坐標相差 1，C、D 兩點在 L_2 上，L_2。若此四點張出的四邊形的面積為 17，$2\le b\le 10$，則 L_1 和 L_2 之間的距離的最大值為_________。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

有甲、乙兩個袋子，甲袋中有 2 顆白球、1 顆紅球，乙袋中有 3 顆白球，小動會從甲袋中抽取 1 顆球，再從乙袋中抽取出 1 顆球，隨即將抽取出的 2 顆球交換放入另一個袋子中，如此稱為一輪「操作」。令紅球在甲袋為狀態一、紅球在乙袋為狀態二，二階轉移矩陣 A 中的 a_{ij} 元為從狀態 j 轉變為狀態 i 的機率。試回答以下問題。

18. 請直接寫出二階轉移矩陣 A(無須解釋原因)，並求出經三輪操作之後，紅球在甲袋的機率。(非選擇題，4 分)

19. 求出 A^n 並用數學歸納法證明，以及經 n 輪操作結束後紅球依然在甲袋的機率，其中 n 為自然數。(非選擇題，6 分)

20. 小動想要求出「已知第 4 輪操作結束後紅球在甲袋的條件下，第 2 輪操作結束後紅球在甲袋」的條件機率。若小動知道分母要放 $A^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的 (1,1) 元，請問此時分子應該要放下列哪個選項中的 (1,1) 元的值？(單選題，5 分)

(1) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\ \sqrt{3}\approx 1.732,\ \sqrt{5}\approx 2.236,\ \sqrt{6}\approx 2.449,\ \pi\approx 3.142$。

指對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010,\ \log_{10}3\approx 0.4771,\ \log_{10}5\approx 0.6990,\ \log_{10}7\approx 0.8451$。

$10^{0.3010}\approx 2,\ 10^{0.4771}\approx 3,\ 10^{0.6990}\approx 5,\ 10^{0.8451}\approx 7$。

RA4109　　全國公私立高中 114 學年度第四次學測模擬考數學 A(南一)

參考答案

選擇題：1.(1)　**2.**(1)　**3.**(2)　**4.**(5)　**5.**(3)　**6.**(3)　**7.**(1)(3)(4)(5)　**8.**(2)(4)(5)　**9.**(2)(3)(5)　**10.**(2)(3)(4)　**11.**(1)(3)(5)　**12.**(2)(4)(5)

選填題：13. 4　**14.** $(7,\frac{56}{5})$　**15.** $\frac{61}{64}$　**16.** $4-4\sqrt{5}$　**17.** $\frac{50}{3}$

混合題：18. $\frac{14}{27}$　**19.** $A^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n}\end{bmatrix}$，略　**20.** (1)(4)