全國公私立高級中學 114 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

數學 A 考科解析

考試日期：114 年 12 月 9~10 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	14-1	14-2
1	1	2	5	3	3	1345	245	235	234	135	245	4	7	5
14-3	14-4	15-1	15-2	15-3	15-4	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	17-3	18	19	20
6	5	6	1	6	4	4	4	5	5	0	3			1

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【測驗目標】多項式函數

【解析】$f(1)=1-2+3+a+b=4$

$f(-1)=1-2-3-a+b=6$

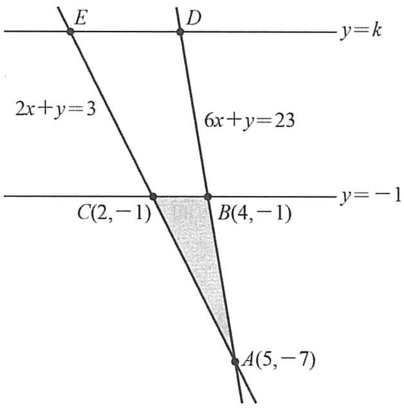
$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=10 \end{cases} \Rightarrow a=-4，b=6$

$\Rightarrow a^3+b^3=-64+216=152$，

故選(1)。

2. 【測驗目標】二元一次不等式

【解析】圖形如下，已知三角形 ABC 的面積是 6，
由於新面積比舊面積多 18，
所以三角形 ADE 的面積是三角形 ABC 面積的 4 倍，
換句換說，$d(A,\overleftrightarrow{DE})=2\cdot d(A,\overleftrightarrow{BC})$，故 $k=5$。
故選(1)。



3. 【測驗目標】三次函數的對稱中心和一次近似

【解析】令 $f(x)$ 在 $x=p$ 處的一次近似為水平線（其中 p 有 2 解），作綜合除法

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -3a & 0 & b & \\
 & p & p(p-3a) & \cdots & p \\
\hline
1 & p-3a & p^2-3ap & & \\
 & p & 2p^2-3ap & & \\
\hline
1 & 2p-3a & 3p^2-6ap & &
\end{array}$$

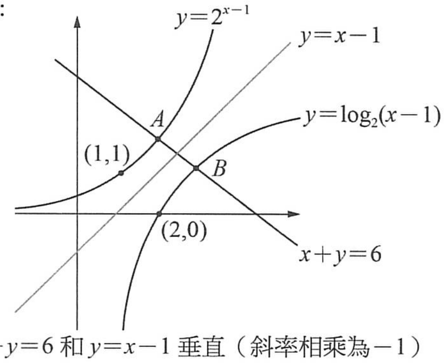
其中 $3p^2-6ap$ 為 $x=p$ 處附近一次近似的斜率，
故 $3p^2-6ap=0 \Rightarrow p(3p-6a)=0$，得 $p=0$ 或 $2a>0$
則 $f(0)=b>0$、$f(2a)=8a^3-12a^3+b=-4a^3+b$
$\because$ 有一處的一次近似為 $y=0$ 且 $b\neq 0$，
$\therefore f(x)$ 在 $x=2a$ 處的一次近似為 x 軸，
即 $-4a^3+b=0 \Rightarrow b=4a^3$

故 $f(x)=x^3-3ax^2+4a^3$，對稱中心 x 坐標：$-\dfrac{-3a}{3}=a$，

$f(a)=a^3-3a^3+4a^3=2a^3 \Rightarrow$ 中心 $(a,2a^3)$ 在 $y=2x^3$ 上，
故選(2)。

4. 【測驗目標】函數圖形的對稱性

【解析】α 是 $2^{x-1}=6-x$ 的實根，表示 α 是兩圖形 $y=2^{x-1}$ 和 $y=6-x$ 的交點（令作 A）的 x 坐標，同理，β 是兩圖形 $y=\log_2(x-1)$ 和 $y=6-x$ 的交點（令作 B）的 x 坐標。
其中 $y=2^{x-1}$ 是將 $y=2^x$ 向右移 1 單位而得，
$y=\log_2(x-1)$ 是將 $y=\log_2 x$ 向右移 1 單位而得。
$y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 的圖形以 $y=x$ 成對稱，
$y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 一起向右平移後，對稱軸也會一併被平移，
故 $y=2^{x-1}$ 和 $y=\log_2(x-1)$ 以 $y=x-1$ 成對稱。
如圖：



$\because x+y=6$ 和 $y=x-1$ 垂直（斜率相乘為 -1）

$\therefore A$、B 互為對稱點，中點坐標為 $\begin{cases} x+y=6 \\ y=x-1 \end{cases}$ 得 $(\frac{7}{2},\frac{5}{2})$，

故有 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=7$，

故選(5)。

5. 【測驗目標】組合數、歪斜線

【解析】不共平面的相異四點可以形成一個四面體，
而一個四面體恰有 3 對歪斜線，
故共有 $3\cdot(C^6_4-C^5_4)=30$ 對，
故選(3)。

6. 【測驗目標】遞迴數列、對數律

【解析】$a_n-a_{n-1}=\log_2\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$，$n\geqq 2$，

$$a_1=\log_2\frac{11}{12}，$$
$$a_2-a_1=\log_2\frac{4\cdot 1}{2\cdot 3}$$
$$a_3-a_2=\log_2\frac{5\cdot 2}{3\cdot 4}$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=\log_2\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$a_n=\log_2\left(\frac{11}{12}\times\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\times\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right)$$
$$=\log_2\frac{11(n+2)}{36n}，$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{11(k+2)}{36k} \Rightarrow k=22$，

故選(3)。

二、多選題

7. 【測驗目標】算術平均數、中位數、百分位數、標準差、標準化

【解析】

(1) ○：$36<\dfrac{70n}{100}<37 \Rightarrow 51.4<n<52.8$　$\therefore n=52$（人）。

(2) ×：無法判斷。

(3) ○：$9.2\times 52=478.4$。

(4) ○：$\dfrac{6-9.2}{2}=-1.6$。

(5) ○：$(y_1-a)^2+\cdots+(y_n-a)^2$

$\geqq(y_1-9.2)^2+\cdots+(y_n-9.2)^2=52\times 2^2=208$。

故選(1)(3)(4)(5)。

8. 【測驗目標】排列組合、機率

【解析】

(1) ×：$C_5^{40}C_{15}^{75}$ 代表先從 40 個偶數選 5 個，

再從剩下的 75 個數選 15 個，

此種想法會重複算到，需討論偶數個數才正確。

(2) ○：$\dfrac{C_4^{20}}{C_4^{80}}=\dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{80\cdot 79\cdot 78\cdot 77}<(\dfrac{1}{4})^4=\dfrac{1}{256}$ 。

(3) ×：$\dfrac{C_4^{60}+C_1^{20}C_3^{60}}{C_4^{80}}=\dfrac{60\cdot 59\cdot 58\cdot 137}{80\cdot 79\cdot 78\cdot 77}>(\dfrac{3}{4})^4=\dfrac{81}{256}$。

(4) ○：中 1 個：$\dfrac{C_1^{20}C_3^{60}}{C_4^{80}}$ ……① ，

中 3 個：$\dfrac{C_3^{20}C_1^{60}}{C_4^{80}}$ ……② ，

$\dfrac{①}{②}=\dfrac{20\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 60}=\dfrac{59\cdot 58}{19\cdot 18}=\dfrac{3422}{342}\fallingdotseq 10$。

(5) ○：獎金：1000×4 (倍)×10 (期)＝40000。

故選(2)(4)(5)。

9. 【測驗目標】三角函數的圖形、三角函數的疊合

【解析】

(1) ×：$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\,(\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x)$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 週期為 $\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$ 。

(2) ○：將 $x=\dfrac{5}{12}\pi$ 代入 $f(x)$ 得

$f(\dfrac{5}{12}\pi)=2\cdot\sin(\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{2}{6}\pi)=2\cdot\sin(\dfrac{\pi}{2})=2$

恰為 $f(x)$ 之最大值，

故 $x=\dfrac{5}{12}\pi$ 是 $y=f(x)$ 圖形的其中一條對稱軸。

(3) ○：當 $f(x)=g(x)$ 時，即 $2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi\cdot k$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\cdot k$ ，$k\in Z$

$\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\pi\cdot k$ 或 $\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ ，$k\in Z$

又因為 $0<x<\pi$ ，故 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ ，

$\overline{PQ}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ 。

(4) ×：$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi$

$0\leqq\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})\leqq 1\Rightarrow 0\leqq 2\cdot\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})\leqq 2$

$\Rightarrow 0\leqq f(x)\leqq 2$，故 $f(x)$ 的值域為 $[\,0\,,2\,]$。

(5) ○：檢查週期相同＝π ，振幅相同＝2，

故可以藉平移得到。事實上，

$y=2\cos 2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$

$=2\sin(2x+\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3})=2\sin[\,2\,(x+\dfrac{5}{12}\pi)-\dfrac{\pi}{3}\,]$

可由 $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 向左平移 $\dfrac{5}{12}\pi$ 得到。

故選(2)(3)(5)。

10. 【測驗目標】平面向量的運算與應用

【解析】

(1) ×：$\overrightarrow{AB}=(1,9)$ ，$\overrightarrow{AC}=(5,1)$ ，

故△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&9\\5&1\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|-44|=22$。

(2) ○：△ABP 面積＝$\dfrac{3}{5}$△ABC 面積＝$\dfrac{3}{5}\times 22=\dfrac{66}{5}$ ，

即 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AP}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{66}{5}$ ，

得 $\dfrac{66}{5}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\k\cdot\overrightarrow{AB}+(2-k)\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|\times(-k)$，

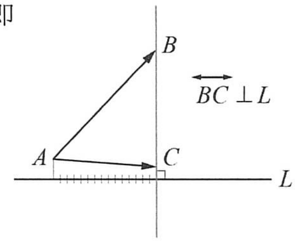
故 $\dfrac{66}{5}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\(2-k)\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot|2-k|\cdot\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

$=22\cdot|2-k|$

$\Rightarrow|2-k|=\dfrac{3}{5}$ ，

$k=\dfrac{7}{5}$ 或 $\dfrac{13}{5}$ ($k=\dfrac{13}{5}$ 不合，因為 $0<k<2$)

(3) ○：題意即



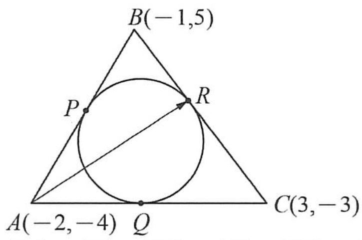
$\overleftrightarrow{BC}$：$2x+y=3$，斜率＝−2，而 $L\perp\overleftrightarrow{BC}$ ，

知 $m=\dfrac{1}{2}$ 。

(4) ○：$\overrightarrow{AB}=(1,9)$ ，取 L 方向向量：$\vec{d}=(2,1)$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{d}|}=\dfrac{2\times 9}{\sqrt{82}\times\sqrt{5}}=\dfrac{11}{\sqrt{410}}$ 。

(5) ×：



$\overline{AB}=\sqrt{82}$ 、$\overline{AC}=\sqrt{26}$ 、$\overline{BC}=\sqrt{80}$ 。

令內切圓和 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$ 的切點分別為 P、Q，

可令 $\overline{AP}=\overline{AQ}=x$，$\overline{PB}=\overline{BR}=y$，$\overline{QC}=\overline{CR}=z$

$\Rightarrow x+y=\sqrt{82}$ 、$x+z=\sqrt{26}$ 、$y+z=\sqrt{80}$ ，

得 $x+y+z=\dfrac{\sqrt{82}+\sqrt{26}+\sqrt{80}}{2}$

$\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{82}+\sqrt{80}-\sqrt{26}}{2}$ 、$z=\dfrac{\sqrt{26}+\sqrt{80}-\sqrt{82}}{2}$ ，

故 $\overrightarrow{AR}=\dfrac{z}{y+z}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{y}{y+z}\cdot\overrightarrow{AC}$ ，而 $y:z\neq 1:4$，

故 $\overrightarrow{AR}\neq\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ 。

故選(2)(3)(4)。

11. 【測驗目標】行列式、向量的內積、外積、線性組合

【解析】

(1) ○：因為 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 可張成一個矩形 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$。

(2) ×：因為 $\overrightarrow{OC}$ 可以表示為 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合，所以 $\overrightarrow{OC}$ 也在 xy 平面上，故 z_3 必為 0。

(3) ○：$\det(M)=\begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix}=(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=0$

(因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$)。

(4) ×：反例：$\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

但 $\dfrac{1}{2}|\det(M)|=\dfrac{1}{2}$。

(5) ○：由題意可知 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 不共平面，則 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 可張成一個平行六面體，所以 $\det(M)\neq 0$。

故選(1)(3)(5)。

12. 【測驗目標】旋轉矩陣、鏡射矩陣、轉移矩陣

【解析】

(1) ×：$A=kB+C=\begin{bmatrix} 5k & -25k+1 \\ -k+1 & 5k \end{bmatrix}$，

因為 A 是旋轉矩陣，所以 $-k+1=-(-25k+1)$

$\Rightarrow k=\dfrac{1}{13}$。

(2) ○：$A=\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，

$\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，$\sqrt{3}<\dfrac{12}{5}<2+\sqrt{3}\Rightarrow 60^\circ<\theta<75^\circ$，

$P'(\cos 3\theta,\sin 3\theta)\Rightarrow 180^\circ<3\theta<225^\circ$，

$\therefore P'\in$ 第三象限

(3) ×：$C^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$

$\therefore A^4C^2=A^4$ 是旋轉矩陣。

(4) ○：$A^4C=\begin{bmatrix} \cos 4\theta & -\sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \cos 4\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -\sin 4\theta & \cos 4\theta \\ \cos 4\theta & \sin 4\theta \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \sin(-4\theta) & \cos(-4\theta) \\ \cos(-4\theta) & -\sin(-4\theta) \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+4\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}+4\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+4\theta) & -\cos(\frac{\pi}{2}+4\theta) \end{bmatrix}$

是鏡射矩陣。

(5) ○：$C^{-1}=C$，

$$\frac{(C^2+C^{-1})^2}{4}=\frac{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2}{4}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

是轉移矩陣。

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

13. 【測驗目標】算幾不等式、指數律

【解析】$2^x+4^y=2^x+2^{2y}\geq 2\cdot\sqrt{2^{x+2y}}=4$，

等號成立時，即 $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$。

14. 【測驗目標】點與圓的關係、柯西不等式

【解析】由柯西不等式：$(x^2+y^2)(a^2+b^2)\geq(ax+by)^2$

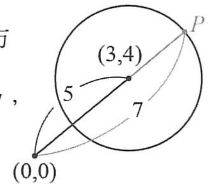
$\Rightarrow x^2+y^2\geq(ax+by)^2$，

又 x^2+y^2 即為 $P(x,y)$ 和原點距離的平方

$\Rightarrow 3^2\leqq x^2+y^2\leqq 7^2$

$\therefore (ax+by)^2\leqq 7^2\Rightarrow ax+by$ 之最大值為 7，

$\Rightarrow M=7$。



等號成立時，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$。

此時 $P(7\times\dfrac{3}{5},7\times\dfrac{4}{5})=P(\dfrac{21}{5},\dfrac{28}{5})$，

即 $x:y=3:4=a:b\Rightarrow Q(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$

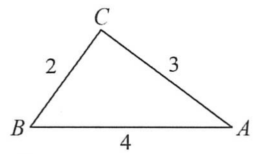
$\therefore\ x_0=\dfrac{21}{5}$，$y_0=\dfrac{28}{5}$，$a_0=\dfrac{3}{5}$，$b_0=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow x_0+y_0+a_0+b_0=\dfrac{56}{5}$。

故 $(M,N)=(7,\dfrac{56}{5})$。

15. 【測驗目標】三角比、和角公式

【解析】



$\sin A:\sin B:\sin(A+B)$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

$=a:b:c=2:3:4$，

$\cos A=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{7}{8}\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

$\cos B=\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\dfrac{11}{16}\Rightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{135}}{16}$，

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{11}{16}+\dfrac{\sqrt{15}}{8}\times\dfrac{\sqrt{135}}{16}=\dfrac{61}{64}$。

16. 【測驗目標】平面向量的內積、疊合求極值

【解析】$\because\ \overline{BC}=\overline{BG}=2\quad\therefore\angle BGC=\angle BCG=\theta$

故 $\angle CBG=180^\circ-2\theta$，$\angle ABC=2\theta$，$0^\circ<\theta<90^\circ$，

架坐標，令 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$G(6,0)$ 可得

$C(4+2\cos(180^\circ-2\theta),2\sin(180^\circ-2\theta))$

即 $C(4-2\cos 2\theta,2\sin 2\theta)$、$F(4-2\cos 2\theta,2\sin 2\theta+4)$

$\overrightarrow{AC}=(4-2\cos 2\theta,2\sin 2\theta)$，

$\overrightarrow{FG}=(2+2\cos 2\theta,-2\sin 2\theta-4)$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FG}=(4-2\cos 2\theta)(2+2\cos 2\theta)+2\sin 2\theta\cdot(-2\sin 2\theta-4)$

$=8+8\cos 2\theta-4\cos 2\theta-4\cos^2 2\theta-4\sin^2 2\theta-8\sin 2\theta$

$=8+4\cos 2\theta-4-8\sin 2\theta=4+4\cos 2\theta-8\sin 2\theta$

$=4+4\sqrt{5}\cos(2\theta+\phi)$，其中 $\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\phi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

注意到 $\phi<2\theta+\phi<180^\circ+\phi$，

此時 $\cos(2\theta+\phi)$ 的最小值為 -1，所求最小值為 $4-4\sqrt{5}$。

17. 【測驗目標】空間中的直線方程式、空間中兩平行直線間的距離

【解析】$\because L_1 /\!/ L_2\quad\therefore(a,1,c)/\!/(c,b,2)$

又 $\because abc\neq 0$ 知 a,b,c 皆不為 0，

$\therefore k(a,1,c)=(c,b,2)$，$k\neq 0$

由 y 分量可知 $k=b$，得 $ab=c$ 且 $bc=2$

$\because A$、B 兩點在 L_1 上 $\quad\therefore\overrightarrow{AB}/\!/(a,1,c)$

而又 A、B 兩點的 y 坐標相差 1，故 $\overrightarrow{AB}=\pm(a,1,c)$

∵ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AB}=\overline{CD}$

∴ 四邊形 $ABCD$ 是一個平行四邊形

所求的距離

$$=\frac{\square ABCD\text{ 面積}}{\overline{AB}}=\frac{17}{|(a,1,c)|}=\frac{17}{\sqrt{a^2+c^2+1}}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{\frac{c^2}{b^2}+c^2+1}}\ \left(\because a=\frac{c}{b}\right)=\frac{17}{\sqrt{\frac{4}{b^4}+\frac{4}{b^2}+1}}\ \left(\because c=\frac{2}{b}\right)$$

$$=\frac{17}{\frac{2}{b^2}+1}\ \left(\because \left(\frac{2}{b^2}+1\right)^2=\frac{4}{b^4}+\frac{4}{b^2}+1\right)$$

其中 $2\leqq b\leqq 10 \Rightarrow \frac{1}{50}\leqq\frac{2}{b^2}\leqq\frac{1}{2}$，

$\frac{17}{\frac{2}{b^2}+1}$ 的最大值為 $\frac{17}{\frac{1}{50}+1}=17\times\frac{50}{51}=\frac{50}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】矩陣的運算

【解析】 $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，(1 分)

三輪操作後：

$$A^3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{(1 分)}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{14}{27} & \frac{13}{27}\\ \frac{13}{27} & \frac{14}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{(1 分)}=\begin{bmatrix}\frac{14}{27}\\ \frac{13}{27}\end{bmatrix},$$

可知所求為 $\frac{14}{27}$。(1 分)

19. 【測驗目標】矩陣的運算

【解析】 $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，

令 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=M$，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 為 I (1 分)

$A^n=(\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}M)^n$，由二項式定理

$=(\frac{1}{3})^n\cdot(C_0^n\cdot I+C_1^n\cdot M+C_2^n\cdot M^2+\cdots+C_n^n\cdot M^n)$，(1 分)

其中 $M^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=2M$，$M^3=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}=2^2\cdot M$，

設 $M^k=2^{k-1}M$ 成立，k 為 $\geqq 2$ 的自然數，

$M^{k+1}=2^{k-1}\cdot M\cdot M=2^{k-1}\cdot 2M=2^k\cdot M$ 亦成立，

故 $M^n=2^{n-1}\cdot M$ 對於所有自然數 n 皆成立。(1 分)

所以

$$A^n=(\frac{1}{3})^n\cdot[I+M(C_1^n+2\cdot C_2^n+4\cdot C_3^n+\cdots+2^{n-1}\cdot C_n^n)]$$

$$=(\frac{1}{3})^n\cdot[I+\frac{1}{2}M(C_0^n+2\cdot C_1^n+4\cdot C_2^n+\cdots+2^n\cdot C_n^n-C_0^n)]$$

$$=(\frac{1}{3})^n\cdot[I+\frac{3^n-1}{2}\cdot M]\text{ (1 分)}$$

$$=(\frac{1}{3})^n\begin{bmatrix}1+\frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n-1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2} & 1+\frac{3^n-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n}\end{bmatrix}\text{ (1 分)}$$

n 輪後紅球在甲袋的機率為 $A^n\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的 (1 , 1) 元，

$A^n\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\end{bmatrix}$，故為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n}$。(1 分)

20. 【測驗目標】轉移矩陣、線性變換

【解析】題意中的條件機率為

P (2 輪後紅球在甲 | 4 輪後紅球在甲)，

即 $\frac{P\text{ (2 輪後紅球在甲且 4 輪後紅球在甲)}}{P\text{ (4 輪後紅球在甲)}}$，

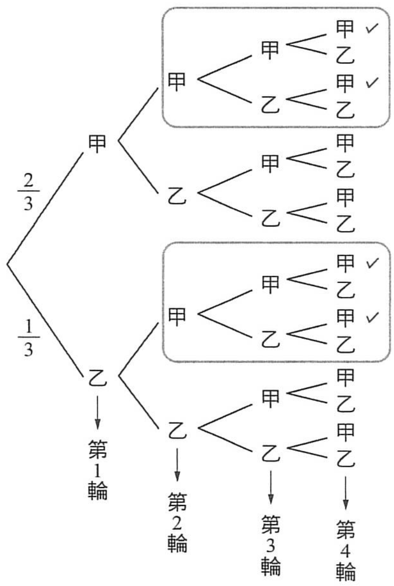
其中 P (4 輪後紅球在甲) 即 $A^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的 (1 , 1) 元，

又需選出 P (2 輪後紅球在甲且 4 輪後紅球在甲) 是哪個選項的(1 , 1) 元即可。

題意中給的轉移矩陣 A 表達的是

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{原先紅在甲} & \text{原先紅在乙}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{後來紅在甲}\\ \text{後來紅在乙}\end{array} & \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\end{array}$$

用樹狀圖來看



根據此圖，

P (1 輪後紅球在甲袋) 即 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 的 (1 , 1) 元，即 $\frac{2}{3}$。

而因要討論的事件為第 2 輪結束後，紅球必須要在甲袋的事件，故第 2 輪的轉移矩陣只能留下「後來紅在甲」的那一列，

即 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，再在無其他限制下作第 3、4 輪的轉移矩陣，

此時紅球在甲袋的機率為

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^2}_{\text{第3、4輪}}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\text{第2輪}}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}}_{\text{第1輪}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{ 的 (1 , 1) 元，}$$

故選(1)