數學A考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(2)	(4)	(4)	(3)	(2)(4)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(3)(5)	(1)(5)	(1)(2)(4)	(1)(5)	(2)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：行列式的運算、兩平行平面的距離

解析：將 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=10$ 展開整理得

平面 E 方程式為 $3x-3z=10$

因為平面 E 與平面 F 平行，

所以可設平面 F 方程式為 $3x-3z=k$

又平面 F 過原點，因此 $k=3\times0-3\times0=0$，

可得平面 F 的方程式為 $3x-3z=0$

所以兩平面距離為 $\dfrac{|10-0|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{18}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

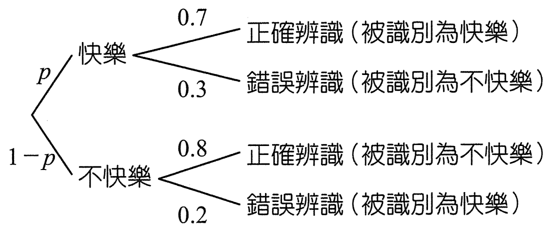
故選(1)。

2. (4)

出處：第四冊〈機率〉

目標：機率、貝氏定理

解析：設實際快樂的比例是 p，而實際不快樂的比例是 $1-p$



則 P(被識別為快樂)$=0.7p+0.2(1-p)=0.5$，

解得 $p=0.6$

所以 P(實際快樂 | 被識別為快樂)$=\dfrac{0.6\times0.7}{0.5}=0.84$

故選(4)。

3. (2)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：鏡射矩陣、反方陣

解析：因為 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$，

所以矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 將點 P 變換到 Q，即 $AP=Q$

又直線 $x=0$ 的斜角為 90°，

其鏡射矩陣 $B=\begin{bmatrix} \cos(2\times90^\circ) & \sin(2\times90^\circ) \\ \sin(2\times90^\circ) & -\cos(2\times90^\circ) \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此矩陣 B 將 Q 點變換到 R，即 $BQ=R$

$\Rightarrow BAP=R \Rightarrow P=(BA)^{-1}R$

故 $M=(BA)^{-1}=\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，故選(2)。

4. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第一冊〈數與式〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：二項式定理、餘數

解析：因為 $2025^{2025}=(2000+25)^{2025}$

$=C_0^{2025}25^{2025}+C_1^{2025}2000\times25^{2024}+\cdots\cdots+C_{2025}^{2025}2000^{2025}$

$=25^{2025}+10000k_1\ (k_1\in Z)$

所以 2025^{2025} 與 25^{2025} 的末四位數字相同

又 $25^2=625$，末四位數字為 0625

$25^3=(600+25)\times25=15000+625$

$=15625$，末四位數字為 5625

$25^4=(15000+625)\times25=375000+15625$

$=390625$，末四位數字為 0625

$25^5=(390000+625)\times25=390000\times625+15625$

$=10000\times k_2+5625\ (k_2\in Z)$，末四位數字為 5625

以此類推得知 $\begin{cases} 25^{2n}\ (n\in N) \text{ 的末四位數字為 } 0625 \\ 25^{2n+1}\ (n\in N) \text{ 的末四位數字為 } 5625 \end{cases}$

故 2025^{2025} 乘開後末四位數字為 5625，

其和為 $5+6+2+5=18$

故選(4)。

5. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：機率、期望值

解析：設第一次、第二次與第三次投擲點數分別為 a、b、c，

c	6	5	4	3
獎金 X	6×720	5×720	4×720	3×720
機率	$\dfrac{C_2^5}{6\times6\times6}$	$\dfrac{C_2^4}{6\times6\times6}$	$\dfrac{C_2^3}{6\times6\times6}$	$\dfrac{C_2^2}{6\times6\times6}$

期望值為 $\left(6\times\dfrac{10}{216}+5\times\dfrac{6}{216}+4\times\dfrac{3}{216}+3\times\dfrac{1}{216}\right)\times720$

$=\dfrac{105}{216}\times720=350$，故選(4)。

6. (3)

出處：第二冊〈三角比〉、第四冊〈空間向量〉

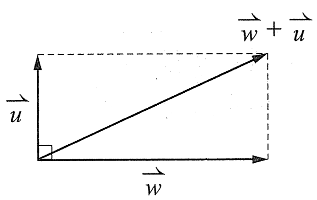
目標：正射影的定義、空間內積的運算、餘弦定理

解析：因為 $\overrightarrow{w}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 垂直，所以 $\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{w}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{w}$

因此 $|\overrightarrow{w}|=2\sqrt{6}$，

且 $|\overrightarrow{u}|^2=|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}|^2-|\overrightarrow{w}|^2=29-24=5$

$\Rightarrow |\overrightarrow{u}|=\sqrt{5}$

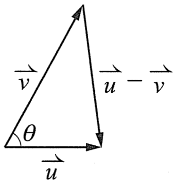


同理可得 $|\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}|^2-|\overrightarrow{w}|^2=38-24=14$

$\Rightarrow |\overrightarrow{v}|=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u})-(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v})$
$=(4,3,2)-(3,2,5)=(1,1,-3)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|=\sqrt{11}$



設 θ 為 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 的夾角，

則 $\cos\theta=\dfrac{5+14-11}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{14}}=\dfrac{4}{\sqrt{70}}$

因此 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{70}}$，而 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形

面積為 $\sqrt{5}\times\sqrt{14}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{70}}=3\sqrt{6}$

故由 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 所決定的平行六面體體積為
$3\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=36$

故選(3)。

二、多選題

7. (2)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次多項式函數的圖形、除法原理

解析：(1)╳：將 $f(x)$ 展開後整理得 $f(x)=x^3+9x^2+11x-21$，

$h=-\dfrac{9}{3\times1}=-3$

再連續使用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & +9 & +11 & -21 & -3 \\
 & -3 & -18 & +21 & \\ \hline
1 & +6 & -7 & +0 & \\
 & -3 & -9 & & \\ \hline
1 & +3 & -16 & & \\
 & -3 & & & \\ \hline
1 & +0 & & & \\ \hline
1 & & & &
\end{array}$$

可得 $f(x)=(x+3)^3-16(x+3)$

所以 $a=1$，$p=-16$，故 $ap<0$

(2)○：對稱中心 $(h,k)=(-3,0)$ 在 x 軸上

(3)╳：三次多項式函數圖形是點對稱圖形，故無對稱軸

(4)○：因為 $f(x)=(x+3)(x+3)^2-16(x+3)$

所以 $f(x)$ 除以 $(x+3)^2$ 的餘式為 $-16x-48$

(5)○：$y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=-21$ 的交點

為方程組 $\begin{cases} y=x^3+9x^2+11x-21 \cdots\cdots ① \\ y=-21 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 的解

將②代入①得 $-21=x^3+9x^2+11x-21$

$\Rightarrow x(x^2+9x+11)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\dfrac{-9\pm\sqrt{37}}{2}$，

故兩圖形有 3 個交點

故選(2)(4)(5)。

8. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：數據分析，最適直線

解析：(1)○：114 年 GDP 年增率為

$\dfrac{(805573-795573)}{795573}\times100\%\approx1.26\%$

(2)╳：相關係數小於或等於 1

(3)○：最適直線斜率為 1.1051，表示 x 軸分量增加 1 %，y 軸分量增加 1.1051 %

(4)╳：最適直線無法解釋變數間的因果關係

(5)○：$y=1.1051\times20-0.5049=21.5971$，

即為 21.5971 %

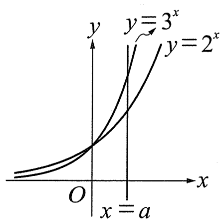
故選(1)(3)(5)。

9. (1)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈指數與對數函數〉

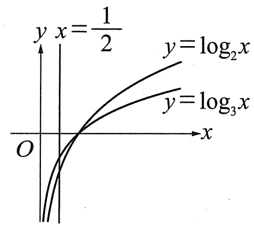
目標：指對數圖形、凹口方向、算幾不等式

解析：(1)○：由下圖可知，若 $a>0$，則 $3^a>2^a$



(2)╳：令 $a=\dfrac{1}{2}$，則 $\log_2\dfrac{1}{2}=-1$、

$\log_3\dfrac{1}{2}=\dfrac{\log\frac{1}{2}}{\log3}=-\dfrac{\log2}{\log3}>-1$



(3)╳：$y=\log x$ 圖形凹口向下

$\Rightarrow \dfrac{\log a+\log b}{2}\leq\log\dfrac{a+b}{2}$

(4)╳：令 $a=\dfrac{1}{10}$、$b=\dfrac{1}{1000}$，

則 $\log a=-1$、$\log b=-3$，

此時 $\dfrac{\log a+\log b}{2}<0<\sqrt{(\log a)(\log b)}$

(5)○：由算幾不等式可得

$\dfrac{3^{\log2}+3^{\log5}}{2}\geq\sqrt{3^{\log2}\times3^{\log5}}=\sqrt{3^{\log2+\log5}}=\sqrt{3}$

故 $3^{\log2}+3^{\log5}\geq2\sqrt{3}$

故選(1)(5)。

10. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：點到直線與點到圓的距離、餘弦函數

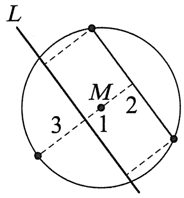
解析：(1)○：圓 C 的圓心 $M(1,0)$，半徑 $r=4$

圓心 M 到直線 L 距離為 $d(M,L)=\dfrac{|4+1|}{5}=1$

故 $\overline{AB}=2\sqrt{4^2-1^2}=2\sqrt{15}$

(2) ○：$\cos\angle AMB=\dfrac{4^2+4^2-(2\sqrt{15})^2}{2\times4\times4}=-\dfrac{7}{8}$

(3) ╳：如下圖，共三個點



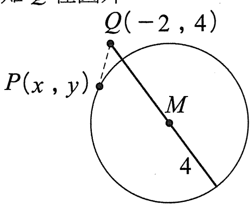
(4) ○：距離為 0 的有兩點，距離為 1，2 的各有四點，距離為 3 的有三點，

距離為 4 的有兩點，距離為 5 的有一點，共 16 點

(5) ╳：令 $Q(-2,4)$，則 $(x+2)^2+(y-4)^2=\overline{PQ}^2$

因為 $\overline{QM}=\sqrt{(-2-1)^2+(4-0)^2}=5>4$，

可知 Q 在圓外



因此 $\overline{PQ}$ 最大值為 $5+4=9$，則 $\overline{PQ}^2$ 之最大值為 81

故選(1)(2)(4)。

11. (1)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合、正弦函數的圖形與圖形的伸縮、平移

解析：(1) ○：$f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\pi x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\pi x\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)，$$

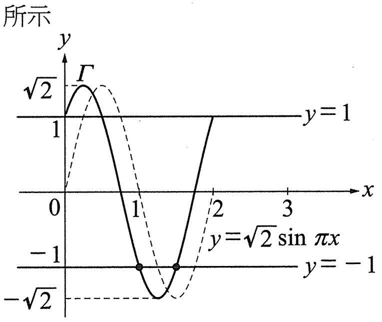
所以函數 $f(x)$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

(2) ╳：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，其最大值為 $\sqrt{2}$

若 L 與 Γ 相交，則 k 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) ╳：因為 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\right)$ 的圖形為 $y=\sin x$ 的圖形以 x 軸為中心線，沿鉛直方向伸縮為 $\sqrt{2}$ 倍，再以 y 軸為中心線，沿水平方向伸縮為 $\dfrac{1}{\pi}$ 倍

然後再向左平移 $\dfrac{1}{4}$ 單位所得，所以 Γ 圖形如下所示



由圖形可知，若 L 與 Γ 恰有三個交點，則 $y=1$，即 $k=1$

(4) ╳：令 $\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\right)=1$，其中 $0\le x\le 2$

因為 $\sin\left(\pi\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

且 $\dfrac{1}{4}\le x+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{9}{4}$，

所以 $x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$ 或 $x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ 或 $x+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$，

解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$

故 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}<3$

(5) ○：將 $y=\sqrt{2}\sin\pi x$ 在 $\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{9}{4}$ 的部分圖形向左平移 $\dfrac{1}{4}$ 單位，即得圖形 Γ

因為在 $1<x<2$，$y=\sqrt{2}\sin\pi x$ 圖形在 x 軸下方，則 $b=2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$

故選(1)(5)。

12. (2)(4)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：兩平面的夾角、求直線兩面式的方向向量、兩直線的夾角

解析：$\overrightarrow{n_1}=(1,-1,-1)$、$\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$、$\overrightarrow{n_3}=(1,-1,t)$ 分別為平面 E_1、E_2、E_3 的法向量

(1) ╳：設 E_1 與 E_2 的銳夾角為 θ，

則 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{|1-1+1|}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

(2) ○：$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,-1,-1)\times(1,1,-1)=2(1,0,1)$ 為直線 L_1 的一個方向向量

故 $\overrightarrow{v_1}=(1,0,1)$ 亦為直線 L_1 的一個方向向量

(3) ╳ (4) ○：$\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_3}|}\right|=\dfrac{|2-t|}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+t^2}}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 3|2-t|=\sqrt{6+3t^2}$

$\Rightarrow 9(t^2-4t+4)=3t^2+6$

$\Rightarrow t^2-6t+5=(t-1)(t-5)=0$

$\Rightarrow t=1$ 或 $t=5$

當 $t=1$ 時，則交點為 $\begin{cases}x-y-z=3\\x+y-z=5\\x-y+z=1\end{cases}$，

解得交點為 $(3,1,-1)$

當 $t=5$ 時，則交點為 $\begin{cases}x-y-z=3\\x+y-z=5\\x-y+5z=1\end{cases}$，

解得交點為 $\left(\dfrac{11}{3},1,-\dfrac{1}{3}\right)$，不合

故 $t=1$，$b=1$

(5)╳：$\overrightarrow{n_2} \times \overrightarrow{n_3} = (1,1,-1)\times(1,-1,1)$
$= -2(0,1,1)$
為直線 L_2 的一個方向向量
則 $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$ 亦為直線 L_2 的一個方向向量
設 L_1 與 L_2 的銳夾角為 α，
則 $\cos\alpha = \left|\dfrac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}\right| = \dfrac{|1|}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$
故選(2)(4)。

三、選填題

13. 60

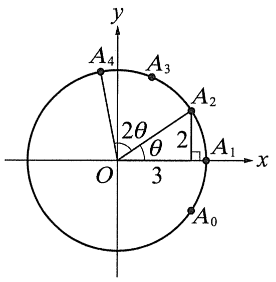
出處：第二冊〈數列與級數〉
目標：等比級數的計算
解析：$b_k = a_k + 2a_{k+1} = a_k + 4a_k = 5a_k$
$S_{114} = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_{114} = 5a_1 + 5a_2 + \cdots\cdots + 5a_{114}$
$= 5(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{114}) = 5\times 12 = 60$。

14. $\dfrac{13}{6}$

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈多項式函數〉
目標：絕對值不等式、二次不等式
解析：(1) $(|x-1|)^2 \le (|x-6|)^2 \Rightarrow x^2-2x+1 \le x^2-12x+36$
$\Rightarrow 10x \le 35 \Rightarrow x \le \dfrac{7}{2}$
(2) $(|x-6|)^2 \le (2|x+1|)^2$
$\Rightarrow x^2-12x+36 \le 4(x^2+2x+1) \Rightarrow 3x^2+20x-32 \ge 0$
$\Rightarrow (3x-4)(x+8) \ge 0 \Rightarrow x \ge \dfrac{4}{3}$ 或 $x \le -8$
(3)又正實數 x，即 $x>0$，因此區間為 $\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{7}{2}$，
故長度為 $\dfrac{7}{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{13}{6}$。

15. $\left(\dfrac{-9}{13}, \dfrac{46}{13}\right)$

出處：第三冊〈三角函數〉、第四冊〈矩陣〉
目標：三角比的定義、二倍角公式、旋轉矩陣
解析：設經過 t 秒後，所在位置為點 A_t
因為 $\overset{\frown}{A_0A_1} = \overset{\frown}{A_1A_2}$，所以 A_0、A_2 兩點對稱於 x 軸
因此 A_2 坐標為 $(3,2)$，又 $\overset{\frown}{A_2A_4} = 2\overset{\frown}{A_1A_2}$
可知將點 A_2 以原點為中心旋轉 2θ 即為點 A_4



因為圓半徑 $r = \overline{OA_1} = \sqrt{13}$

由三角比的定義可得 $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$

再由二倍角公式可得 $\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{12}{13} \\ \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{5}{13} \end{cases}$，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{5}{13} & -\dfrac{12}{13} \\ \dfrac{12}{13} & \dfrac{5}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-9}{13} \\ \dfrac{46}{13} \end{bmatrix}$$

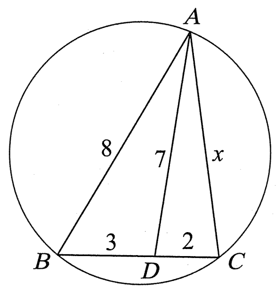
故點 A_4 坐標為 $\left(\dfrac{-9}{13}, \dfrac{46}{13}\right)$。

16. $\dfrac{8}{5}$

出處：第三冊〈平面向量〉
目標：平面向量的係數積與分點公式
解析：設向量 $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AC}$，
因此 $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AC} = \dfrac{3t}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5t}{2}\overrightarrow{AD}$
又 B、E、D 在同一直線上，
E 點是 B、D 兩點的內分點
由分點公式可知 $\dfrac{3t}{2} + \dfrac{5t}{2} = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$
所以 $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AD}$
$\Rightarrow \overline{BE} : \overline{ED} = 5 : 3$
故 $\overrightarrow{BD} = \dfrac{8}{5}\overrightarrow{BE} \Rightarrow k = \dfrac{8}{5}$。

17. $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

出處：第二冊〈三角比〉
目標：正弦定理、餘弦定理
解析：



設 $\overline{AC} = x$，由餘弦定理可知
$\cos\angle ABC = \dfrac{8^2+5^2-x^2}{2\times 8\times 5} = \dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\times 8\times 3} \Rightarrow \dfrac{89-x^2}{5} = 8$
$\Rightarrow x = 7$
又 $\cos\angle ABC = \dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\times 8\times 3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin\angle ABC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
設圓的半徑為 r，由正弦定理可得 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC} = 2r$
$\Rightarrow r = \dfrac{1}{2}\times 7\times\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 30

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈平面向量〉
目標：二次函數配方法與頂點、平面向量的應用
解析：$g(x) = -2x^2+8x+27 = -2(x-2)^2+35$，頂點 $Q(2,35)$
又 $\begin{cases} y = x^2+8x \\ y = -2x^2+8x+27 \end{cases} \Rightarrow x^2+8x = -2x^2+8x+27$
$\Rightarrow 3x^2-27 = 3(x+3)(x-3) = 0$ 解得 $x=-3$ 或 $x=3$

所以兩圖形交點 $A(-3,-15)$、$B(3,33)$

故 Q、A、B 三點所圍成的三角形面積為

「向量 $\overrightarrow{QA}=(-5,-50)$ 與向量 $\overrightarrow{QB}=(1,-2)$ 所圍成的三角形面積」

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-5 & 1\\ -50 & -2\end{vmatrix}\right|=30$。

19. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈平面向量〉

目標：二次函數配方法與頂點、平面向量的應用

解析：$f(x)=x^2+8x=(x+4)^2-16$，頂點 $P(-4,-16)$

又 $Q(2,35)$、$A(-3,-15)$、$B(3,33)$，

可得向量 $\overrightarrow{PA}=(1,1)$、

向量 $\overrightarrow{QB}=(1,-2)$

則 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{1-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$。

◎評分原則

$f(x)=x^2+8x=(x+4)^2-16$，頂點 $P(-4,-16)$

又 $Q(2,35)$、$A(-3,-15)$、$B(3,33)$，

可得向量 $\overrightarrow{PA}=(1,1)$ (1 分)、

向量 $\overrightarrow{QB}=(1,-2)$ (1 分)

則 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{1-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$。(2 分)

20. $m=0$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量的應用

解析：已知向量 $\overrightarrow{PA}=(1,1)$、$\overrightarrow{QB}=(1,-2)$，

設直線 L 為 $y=mx$，則 $\overrightarrow{d}=(1,m)$ 為其方向向量

因為兩向量在直線 L 上的正射影相等

所以 $\left(\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|^2}\right)\overrightarrow{d}=\left(\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|^2}\right)\overrightarrow{d}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{d}$

$\Rightarrow 1+m=1-2m$

$\Rightarrow m=0$。

◎評分原則

已知向量 $\overrightarrow{PA}=(1,1)$、$\overrightarrow{QB}=(1,-2)$，

設直線 L 為 $y=mx$，則 $\overrightarrow{d}=(1,m)$ 為其方向向量 (1 分)

因為兩向量在直線 L 上的正射影相等

所以 $\left(\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|^2}\right)\overrightarrow{d}=\left(\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|^2}\right)\overrightarrow{d}$ ……①

$\Rightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{d}$ …………………②

(①、②兩式出現其中一式，3 分)

$\Rightarrow 1+m=1-2m$ (1 分)

$\Rightarrow m=0$。 (1 分)