北北基高中 115 年(114 學年度)
高三上 第四次學測模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 已知空間中平面 E 的方程式為 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=10$，若平面 F 過原點且與平面 E 平行，試問兩平面 E 與 F 的距離為何？
(1) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$　(2) $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$　(3) $\dfrac{5}{3}$　(4) 5　(5) 10

答：(1)

解：$E: 3x-0y-3z=10 \Rightarrow F: x-0y-z=0$

$$d(E,F)=\frac{10}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

2. AI 科技可透過臉部表情協助識別照片中人類的情緒，已知照片中人類的情緒只有快樂與不快樂兩種，若照片中的人是快樂的，則 AI 科技可正確識別的機率是 0.7；若照片中的人是不快樂的，則 AI 科技可正確識別的機率是 0.8。今有一批照片被識別為快樂的比例是 0.5，則被識別為快樂的照片中，人類的情緒確實為快樂的比例最接近下列何者？
(1) 0.55　(2) 0.65　(3) 0.75　(4) 0.85　(5) 0.95

答：(4)

解：$x\times0.7+(1-x)\times0.2=6.5 \Rightarrow x=0.6$

所求 $=\dfrac{0.6\times0.7}{0.5}=0.84$

3. 已知 $P(x,y)$ 為平面上一點，若將 P 點經線性變換得 $Q(x+y,3x+4y)$，再將 Q 點以直線 $x=0$ 作鏡射得 R 點。若矩陣 M 所代表的線性變換能將 R 點變換到 P 點，則 M 為下列哪個選項？
(1) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

答：(2)

解：$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

4. 2025^{2025}乘開後的末四位數字和為下列哪個選項？
(1) 7　(2) 13　(3) 15　(4) 18　(5) 20

答：(4)

解：因為$2025^{2025}=(2000+25)^{2025}$

$$=C_0^{2025}\,25^{2025}+C_1^{2025}\,2000\times 25^{2024}+\cdots+C_{2025}^{2025}\,2000^{2025}$$

$$=25^{2025}+10000k_1\ (k_1\in Z)$$

所以2025^{2025}與25^{2025}的末四位數字相同

又$25^2=625$，末四位數字為 0625

$25^3=(600+25)\times 25=15000+625=15625$，末四位數字為 5625

$25^4=(15000+625)\times 25=375000+15625=390625$，末四位數字為 0625

$25^5=(390000+625)\times 25=390000\times 625+15625=10000\times k_2+5625\ (k_2\in Z)$，
末四位數字為 5625

以此類推得知$\begin{cases}25^{2n}\ (n\in N)\text{的末四位數為}0625\\ 25^{2n+1}\ (n\in N)\text{的末四位數為}5625\end{cases}$

故2025^{2025}乘開後末四位數字為 5625，其和為$5+6+2+5=18$，故選(4)

5. 某班園遊會推出「擲骰子，換現金」的遊戲。遊戲規則為：玩家擲一顆公正的骰子 3 次為一回合，若擲出的骰子點數相異且點數「越來越大」，則可以得到最大點數的 720 倍作為獎金，其他情況下則無獎金。試問玩家每玩一回合，所獲得獎金的期望值為多少元？
(1) 200元　(2) 240元　(3) 300元　(4) 350元　(5) 380元

答：(4)

解：$E(X)=720\times\left[\dfrac{1}{6^3}\left(3\times C_2^2+4\times C_2^3+5\times C_2^4+6\times C_2^5\right)\right]=350$

6. 坐標空間中有三個相同始點的向量$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$，其中$\overrightarrow{w}$分別與$\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$垂直。
已知$\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}=(4,3,2)$，$\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}=(3,2,5)$，$\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}$在$\overrightarrow{w}$上的正射影長為$2\sqrt{6}$，
試問由$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$所決定的平行六面體體積為何？
(1) 12　(2) 24　(3) 36　(4) 48　(5) 60

答：(3)

解：$\left|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\right|\times\dfrac{(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{w}}{\left|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{w}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{w}\right|^2}{\left|\overrightarrow{w}\right|}=\left|\overrightarrow{w}\right|=2\sqrt{6}$

$\left|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\right|^2=24+0+\left|\overrightarrow{u}\right|^2=29\Rightarrow\left|\overrightarrow{u}\right|=\sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\right|^2=24+0+\left|\overrightarrow{v}\right|^2=38\Rightarrow\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{14}$

$\left|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right|^2=\left|(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u})-(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v})\right|^2\Rightarrow 5-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+14=11\Rightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4$

所求體積$=\sqrt{5\times 14-(4)^2}\times 2\sqrt{6}=36$

二、多選題

7. 將三次函數 $f(x)=(x+7)(x+3)(x-1)$ 整理成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的型式，並觀察 $y=f(x)$ 的圖形。試選出正確的選項。
(1) $ap>0$
(2) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心在 x 軸上
(3)直線 $x=-3$ 是 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸
(4) $f(x)$ 除以 $(x+3)^2$ 的餘式為 $-16x-48$
(5) $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=-21$ 有 3 個交點

答：(2)(4)(5)

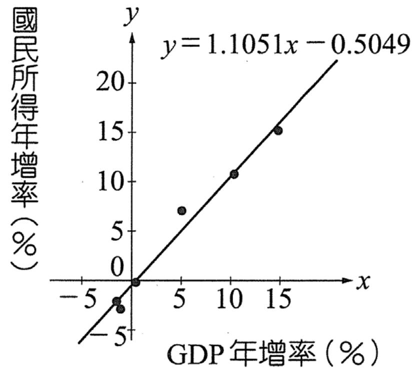
解：$f(x)=x^3+9x^2+11x-21=(x+3)^3-16(x+3)$，對稱中心 $(-3,0)$
$y=x^3+9x^2+11x-21$ 與 $y=-21$ 相交
$\Rightarrow x^3+9x^2+11x=x\left(x^2+9x+11\right)=0$ 有三解

8. 根據某國行政院主計總處 108～113 年的資料，下表為國內生產毛額 *GDP* 和國民所得的列表。

統計期	國內生產毛額 *GDP* (名目值，百萬美元)	*GDP* 年增率(*x*) (%)	國民所得 (名目值，百萬美元)	國民所得年增率(*y*) (%)
108 年	613,453	0.44	529,151	−0.20
109 年	676,935	10.35	586,138	10.77
110 年	777,062	14.79	675,148	15.19
111 年	765,529	−1.48	660,928	−2.11
112 年	757,276	−1.08	641,737	−2.90
113 年	795,573	5.06	687,103	7.07

$$\left[\text{該年}GDP\text{年增率}=\frac{(\text{該年}GDP-\text{前一年}GDP)}{\text{前一年}GDP}\times 100\%\right]$$

以國內生產毛額 *GDP* 的年增率為 x 軸，國民所得的年增率為 y 軸，其散布圖、y 對 x 的最適直線及其方程式如右圖所示。試選出正確的選項。



(1)假設 114 年 *GDP* 為 805,573（百萬美元），則 114 年的 *GDP* 年增率小於 1.5%
(2)國內生產毛額年增率與國民所得年增率的相關係數為 1.1051
(3)由最適直線可推測，若 *GDP* 年增率每增加 1%，則國民所得年增率約增加 1.1051%
(4)我們由最適直線可以確定，*GDP* 為影響國民所得的主要原因
(5)利用最適直線預測，若 115 年 *GDP* 年增率為 20%，則該年國民所得年增率預測約為 21.5971%

答：(1)(3)(5)

解：(1) ○：114 年 *GDP* 年增率為 $\dfrac{(805573-795573)}{795573}\times 100\%\approx 1.26\%$
(2) ×：相關係數小於或等於 1
(3) ○：最適直線斜率為 1.1051，表示 x 軸分量增加 1%，y 軸分量增加 1.1051%

(4) ×：最適直線無法解釋變數間的因果關係

(5) ○： $y=1.1051\times 20-0.5049=21.5971$ ，即為 21.5971%

故選(1)(3)(5)

9. 設 $a>0$ ， $b>0$ ，試選出正確的選項。

(1) $3^{a}\geq 2^{a}$

(2) $\log_{2}a\geq \log_{3}a$

(3) $\dfrac{\log a+\log b}{2}\geq \log\dfrac{a+b}{2}$

(4) $\dfrac{\log a+\log b}{2}\geq \sqrt{(\log a)(\log b)}$

(5) $3^{\log 2}+3^{\log 5}\geq 2\sqrt{3}$

答：(1)(5)

解：(2)(4) $a>1$ 才成立

(3)應為 $\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)\leq \log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

10. 坐標平面上有一圓 C ： $(x-1)^{2}+y^{2}=16$ ，圓心為 M 點，直線 L ： $4x+3y+1=0$ 與圓 C 交於 A 、 B 兩點。試選出正確的選項。

(1) $\overline{AB}=2\sqrt{15}$

(2) $\cos\angle AMB=-\dfrac{7}{8}$

(3)圓 C 上到直線 L 距離為 3 的點，共有 4 個

(4)圓 C 上到直線 L 距離為整數的點，共有 16 個

(5)若 $P(x,y)$ 為圓 C 上一點，則 $(x+2)^{2}+(y-4)^{2}$ 之最大值為 9

答：(1)(2)(4)

解： $d((1,0),4x+3y+1=0)=1$

(1) $\overline{AB}=2\sqrt{4^{2}-1^{2}}=2\sqrt{15}$

(2) $\cos\angle AMB=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}-1=-\dfrac{7}{8}$

(3)恰有 3 個

(4)
$$\left.\begin{array}{l} d=0,4\text{對應各}2\text{個圓上點} \\ d=1,2\text{對應各}4\text{個圓上點} \\ d=3\quad\text{對應各}3\text{個圓上點} \\ d=5\quad\text{對應各}1\text{個圓上點} \end{array}\right\}\text{共}16\text{點}$$

(5)當兩圓內切 $\Rightarrow r-4=5$ ，所求 $Max=r^{2}=81$

11. 設函數 $f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x$ ，以 Γ 表示函數 $f(x)$ 在 $0\leq x\leq 2$ 的圖形， L ： $y=k$ 為一水平直線。試選出正確的選項。

(1)函數 $f(x)$ 的週期為 2

(2)若 L 與 Γ 相交，則 k 的最大值為 1

(3)若 L 與 Γ 恰有三個交點，則 $k=-1$

(4)若 L 與 Γ 恰有三個交點，令三個交點的 x 坐標分別為 a_{1} 、 a_{2} 及 a_{3} ，則 $a_{1}+a_{2}+a_{3}>3$

(5)已知當$a<x<b$時，Γ的圖形均在x軸下方，則b的最大值為$\dfrac{7}{4}$

答：(1)(5)

解：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1)週期$2\pi\times\dfrac{1}{\pi}=2$

(2)應為$k=\sqrt{2}$

(3)應為$k=1$

(4)$a_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$a_3=2$

(5)$\dfrac{3\pi}{4}<x<\dfrac{7\pi}{4}$

12. E_1：$x-y-z=3$、E_2：$x+y-z=5$、E_3：$x-y+tz=1$為空間中的相異三平面。令E_1與E_2相交的直線為L_1；E_2與E_3相交的直線為L_2；E_3與E_1相交的直線為L_3。已知E_1、E_2、E_3中任兩平面所夾銳角的餘弦值皆相同，且三平面交於一點$P(a,b,c)$，其中a、b、c為整數。試選出正確的選項。

(1)平面E_1與E_2所夾銳角的餘弦值為$\dfrac{1}{2}$　　(2)$\overrightarrow{v_1}=(1,0,1)$為直線$L_1$的一個方向向量

(3)$t=5$　　(4)$b=1$　　(5)L_1與L_2的銳夾角為$30°$

答：(2)(4)

解：(1)$\cos\theta=\left|\dfrac{(1,-1,-1)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right|=\dfrac{1}{3}$

(2)L_1：$\begin{cases}x-y=3+s\\x+y=5+s\\z=s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+s\\y=1\\z=s\end{cases}$

(3)$\left.\begin{aligned}&\cos\theta=\left|\dfrac{(1,1,-1)\cdot(1,-1,t)}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+2}}\right|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=\pm1\\&\cos\theta=\left|\dfrac{(1,-1,-1)\cdot(1,-1,t)}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+2}}\right|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=1\text{或}5\end{aligned}\right\}\Rightarrow t=1$

(4)$\begin{cases}x-y-z=3\\x+y-z=5\\x-y+z=1\end{cases}\Rightarrow(x,y,z)=(3,1,-1)$

(5)L_2：$\begin{cases}x+y=5+m\\x-y=1-m\\z=m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=2+m\\z=m\end{cases}$，

故 $\cos\phi=\left|\dfrac{(1,0,1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\phi=60^\circ$

三、選填題

13.已知等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比為 2，且前 114 項和為 12，若 $b_k=a_k+2a_{k+1}$，其中 k 為正整數。試求數列 $\langle b_n\rangle$ 的前 114 項的和為________。

答：60

解：$b_k=a_k+2a_{k+1}=a_k+4a_k=5a_k$

$S_{114}=b_1+b_2+\cdots+b_{114}=5a_1+5a_2+\cdots+5a_{114}$

$=5(a_1+a_2+\cdots+a_{114})=5\times12=60$

14.滿足不等式 $|x-1|\le|x-6|\le2|x+1|$ 的所有正實數 x，其在數線上的區間長度為________。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{13}{6}$

解：$|x-1|\le|x-6|\ \Rightarrow(2x-7)(5)\le0\ \Rightarrow x\le\dfrac{7}{2}$

$|x-6|\le|2x+2|\ \Rightarrow(3x-4)(x+8)\ge0\ \Rightarrow x\ge\dfrac{4}{3}$ 或 $x\le-8$

$\xrightarrow{x>0}\dfrac{4}{3}\le x\le\dfrac{7}{2}$

15.有一個圓心在原點 O 的圓形軌道，$A_0(3,-2)$ 為軌道上一點。有一質點 P 自點 A_0 開始，以等速率在軌道上逆時針滑行，經一秒後首次到達 $A_1(\sqrt{13},0)$。試問質點 P 自點 A_0 開始，四秒後到達的點 A_4 之坐標為________。（化為最簡分數）

答：$\left(\dfrac{-9}{13},\dfrac{46}{13}\right)$

解：$\cos\theta=\dfrac{(3,-2)\cdot(\sqrt{13},0)}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\quad\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos2\theta=2\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)^2-1=\dfrac{5}{13}$，$\sin2\theta=\dfrac{12}{13}$

$\cos4\theta=2\left(\dfrac{5}{13}\right)^2-1=\dfrac{-119}{169}$，$\sin4\theta=\dfrac{120}{169}$

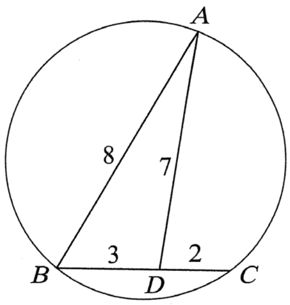
$$\begin{bmatrix}\dfrac{-119}{169} & \dfrac{-120}{169}\\ \dfrac{120}{169} & \dfrac{-119}{169}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-117}{169}=\dfrac{-9}{13}\\ \dfrac{598}{169}=\dfrac{46}{13}\end{bmatrix}$$

16.已知四邊形 $ABCD$，對角線 $\overline{AC}$ 與對角線 $\overline{BD}$ 交於 E 點，若向量 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$，且向量 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BE}$，則 $k=$________。(化為最簡分數)

答：$\frac{8}{5}$

解：$\overrightarrow{AC}=4\left[\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AD}\right]\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\frac{8}{5}\overrightarrow{BE}$

17.如右圖所示，A、B、C 為圓上三點，D 為 $\overline{BC}$ 上一點。若 $\overline{AB}=8$、$\overline{AD}=7$、$\overline{BD}=3$、$\overline{CD}=2$，則此圓的半徑為________。(化為最簡根式)



答：$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

解：$\cos B=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}=\frac{8^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times8\times5}\Rightarrow\overline{AC}=7$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

則 $\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R\Rightarrow R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

已知坐標平面上，兩函數 $f(x)=x^2+8x$ 與 $g(x)=-2x^2+8x+27$ 的圖形頂點分別為 P 與 Q。$y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形交於 A、B 兩點，其中左至右依序為 A、B。

18.Q、A、B 三點所圍成的三角形面積為________。

答：30

解：$\left.\begin{array}{l}f(x)=(x+4)^2-16\Rightarrow P(-4,-16)\\ g(x)=-2(x-2)^2+35\Rightarrow Q(2,35)\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=f(x)\text{與}y=g(x)\\ \text{交於}B(3,33)\text{，}A(-3,-15)\end{array}$

$\overrightarrow{QB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{QA}=(-5,-50)$，$\Delta QAB=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & -2\\ -5 & -50\end{matrix}\right\|=30$

19.若 θ 為向量 $\overrightarrow{PA}$ 與向量 $\overrightarrow{QB}$ 的夾角，試求 $\cos\theta$ 之值。

答：$-\frac{\sqrt{10}}{10}$

解：$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{QB}|}=\frac{(1,1)\cdot(1,-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}$

20. 已知直線 L 為過原點且斜率 m 之直線，若向量 $\overrightarrow{PA}$ 與向量 $\overrightarrow{QB}$ 在直線 L 上之正射影相等，試求 m 之值。

答：$m=0$

解：斜率 m，方向向量 $\overrightarrow{L}=(1,m)$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{L}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{L}\right|}=\left|\overrightarrow{QB}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{L}}{\left|\overrightarrow{QB}\right|\left|\overrightarrow{L}\right|}\Rightarrow 1+m=1-2m\quad\Rightarrow m=0$$