

臺中區國立高級中學 105 學年度學科能力測驗第二次 聯合模擬考試



RA480

第壹部分：選擇題

一、單選題(占 20 分)

1. 平面上有線段 $\overline{OA_0}$ ，以 $\overline{OA_0}$ 為斜邊，做出一直角三角形 $\triangle OA_0A_1$ ，其中 $\angle A_0OA_1$ 為 8° ；再以 $\overline{OA_1}$ 為斜邊，做出一直角三角形 $\triangle OA_1A_2$ ，其中 $\angle A_1OA_2$ 為 8° ；以此類推，若要求 $\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_0}} = 0.5$ ， n 最

接近哪個選項？($\cos 8^\circ \approx 0.99$, $\log 9.9 \approx 0.9956$)

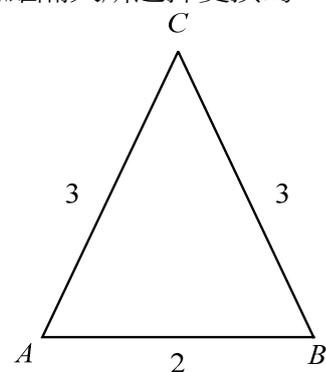
- (1) 30 (2) 40 (3) 50 (4) 60 (5) 70

2. 有一隻流浪螞蟻阿雄，某一天上帝跟牠說：「有三個地方 A 、 B 、 C 無限期提供食物與住宿，這三個地點之間的距離分別為 2 公里、3 公里、3 公里，如圖(1)，你可以前往取用，但有一規定務必遵守：不可連續兩天都待在同一地點，隔天必須前往下一個地點，否則這三個地點就會消失。」阿雄聽了為之動容，決定要依靠上帝給的福利過一輩子。已知阿雄隔天所選擇更換的地點機率與到達路程成反比

(例如： B 到 A 的機率為 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ ， B 到 C 的機率為 $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$)

若阿雄第一天在 B 點，則長期而言，阿雄在 B 點的機率為 p ，以下選項何者正確？

- (1) $p = \frac{1}{3}$ (2) $p = \frac{1}{4}$ (3) $p = \frac{3}{8}$ (4) $p = \frac{5}{14}$ (5) $p = \frac{9}{22}$



圖(1)

3. 設 $x > 1$ ， $y > 1$ ，且 $2\log_x y - \log_y x + 1 = 0$ ，則 $x^2 - 4y^2 + 3$ 的最小值為？

- (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2 (5) 3

4. 試求 $(1+1^2) + (3+2^2) + \dots + [(2k-1)+k^2] + \dots + (19+10^2) = ?$

- (1) 465 (2) 475 (3) 485 (4) 495 (5) 505

二、多選題(占 35 分)

5. 已知 $f(x)$ 為四次實係數多項式，且 $f(-1) = f(i-1) = 0$ ， $f(0) = 2$ ， $f(1) = -10$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $f(i+1) = 0$ (2) $f(i) \neq 0$ (3) $f(2) = 18$
 (4) $f(x) \leq 0$ 的解為 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ (5) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於兩點

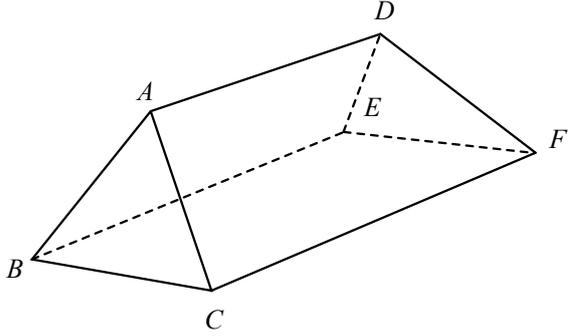
6. 設 p, q 皆為正整數，且 $f(x) = x^4 - 2px^3 + x^2 - qx - 2$ 有整係數的一次因式，則下列選項哪些正確？

- (1) $p > q$ (2) $p+q$ 為質數 (3) p 為偶數 (4) $2p-q=1$
 (5) $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 2

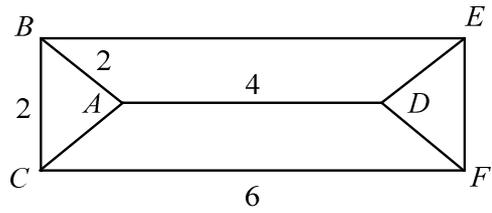
7. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，前 n 項總和為 $S_n = k \cdot n^2 + k \cdot n + k + 3, k \in R$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $k < 0$ (2) $a_4 = 24$ (3) $S_5 = -90$
 (4) $\langle a_n \rangle$ 的公差為 -2 (5) $\sum_{i=1}^{10} \frac{(i+1)a_{i+1} - ia_i}{6} = -100$

8. 一屋頂由長方形當底面，兩梯形及兩正三角形當側面，如圖(2)之立體圖，圖(3)為屋頂的俯視圖， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BE}=6$ ， $\overline{AD}=4$ ，則下列選項哪些正確？



圖(2)



圖(3)

- (1) 平面 $ABED$ 與平面 $ACFD$ 的夾角為 θ_1 ，則 $\theta_1 \leq 60^\circ$
 (2) 平面 $ABED$ 與平面 $BCFE$ 的夾角為 θ_2 ，則 $\theta_2 \leq 60^\circ$
 (3) 平面 ABC 與平面 $BCFE$ 的夾角為 θ_3 ，則 $\theta_3 \leq 60^\circ$
 (4) $\triangle ABF$ 的面積為 $2\sqrt{5}$
 (5) 有一隻螞蟻欲從 B 經過屋頂到 F (不可走底面 $BCFE$)，則最短行進路徑長為 $2\sqrt{13}$
9. 有三個矩陣分別為 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 且 $O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則下列選項哪些正確？
- (1) $AB=BA$ (2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (3) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
 (4) 若 X 為 2×2 矩陣滿足 $AX = O_{2 \times 2}$ ，則 $X = O_{2 \times 2}$
 (5) 若 X 為 2×2 矩陣滿足 $AX = CX$ ，則 $X = O_{2 \times 2}$
10. 小明最近接觸 *Pokemon go*，朋友告訴他在公園裡有一隻皮卡丘，已知公園是個三角形，頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(22,0)$ ， $C(10,20)$ 。若小明發現皮卡丘距離 A 點比 B 點近；距離 C 點比 B 點近；而距離 C 點又比 A 點近！小明很想抓到這隻皮卡丘，令皮卡丘可能存在的區域為 Ω ，則下列選項哪些正確？
- (1) 在 Ω 中， x 坐標的範圍是 $5 < x < 16$
 (2) Ω 的面積為 $\frac{259}{6}$
 (3) 若小明來到公園內部一點 $P(3, 1)$ ，則他與皮卡丘的可能距離可能小於 9
 (4) Ω 的各邊中(不考慮鉛直線)，斜率最小為 $-\frac{1}{2}$
 (5) 若皮卡丘在 Ω 內一點 Q ，則 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最小值為 8
11. 若兩組資料 X 、 Y ，滿足 $x_i + 3y_i - 7 = 0$ ， $k = 1, 2, \dots, n (n \geq 2 \text{ 且 } x_i \text{ 相異})$ ，則下列選項哪些正確？
- (1) Y 對 X 的迴歸直線為 $x + 3y - 7 = 0$
 (2) X 、 Y 兩組資料的算術平均數 μ_X 、 μ_Y 滿足 $\mu_X + 3\mu_Y - 7 = 0$
 (3) X 的全距是 Y 的 3 倍 (4) X 的中位數是 Y 的 3 倍
 (5) 若 r 是 X 、 Y 的相關係數，則 $-1 < r < 1$

第貳部分：選填題(占 45 分)

A. 設 $k \in N$ ，若方程式 $9^x - 4 \cdot 3^x + 1 - \log_2 k = 0$ 有實根，則滿足上述條件中 k 的最小值為 _____。

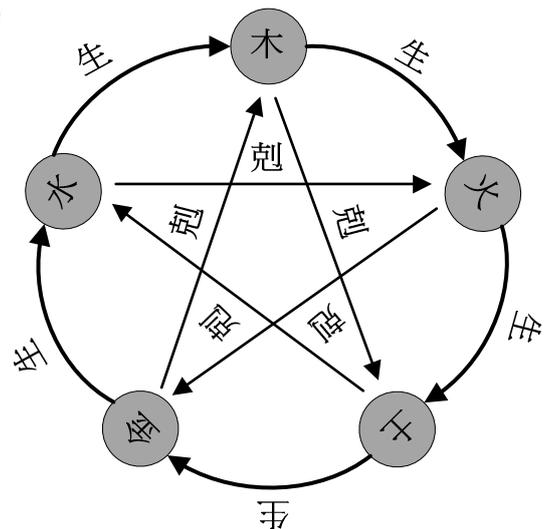
B. 坐標平面上給兩定點 $A(0,1)$ 、 $B(4,2)$ 、拋物線 $\Gamma: y = -\frac{1}{4}x^2$ 。若點 C 在 Γ 上變動，則 $\triangle ABC$ 的最小面積為 _____。(化為最簡分數)

C. 坐標空間中有四點， $A(-3,1,2)$ 、 $B(-2,3,1)$ 、 $C(6,0,-2)$ 與 $D(2,2,-4)$ 。若點 P 在線段 AB 上變動，則內積 $\vec{PC} \cdot \vec{PD}$ 最小值為 _____。

D. x, y, z 為實數，滿足 $3[(x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-5)^2] = (x+2y+z-9)^2$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$ 之最小值為 _____。

E. 直線 $L_1: \frac{x-5}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{3}$ 與直線 $L_2: \frac{x-b}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3}$ 垂直，則 $(a, b) =$ _____。

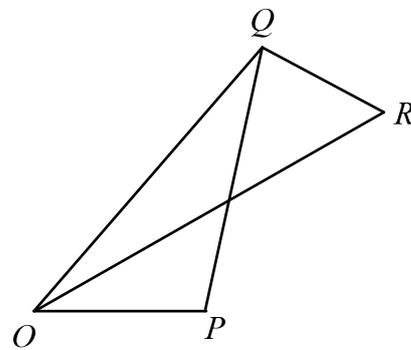
F. 中國人講究五行相生相剋的道理(如圖(4))，在五種屬性中，甲乙丙三人各選一種，任兩人皆不重複。則在三人中產生兩組相剋的條件之下，甲與丙的屬性有相生(例如甲、丙分別選擇木、火，或是火、木)的機率為 _____。(化為最簡分數)



圖(4)

G. O 為平面上坐標原點， t, k 為實數， $\vec{OP} = t \cdot \vec{u} + (k-t) \cdot \vec{v}$ ，其中 $\vec{u} = (2,1)$ ， $\vec{v} = (4, -\frac{1}{2})$ 。若存在 t 使得線段 \overline{OP} 與 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ 有交點，求 k 的最小值為 _____。

- H. 如圖(5)，某人從原點 O 出發，直線前進了 5 公尺，來到 P 點，換個方向前進 $\sqrt{97}$ 公尺來到 Q 點，此時與 O 點的距離恰好 12 公尺，再換個方向前進 5 公尺來到 R 點，此時與 O 點的距離又恰為 13 公尺，求 P 點與 R 點距離為_____。



圖(5)

- I. 坐標平面上有一圓，以 $O(2, 3)$ 為圓心，半徑 1， P 點在圓周上作等速率運動，即相對於圓心，每秒所轉動的角度相等。若 P 點用 36 秒恰繞圓周一次，每秒所繞角度為 $\frac{360^\circ}{36}$ 。現在考慮 P 點在 x 軸上的投影點 Q (每秒記錄一次)，計算 1~36 秒， Q 點 x 坐標的變異數為_____。(化為最簡分數)

RA480 (臺中區國立高級中學 105 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考)

選擇題：1. (5) 2. (4) 3. (1) 4. (3) 5. (2)(5) 6. (2)(4) 7. (1)(3) 8. (2)(3) 9. (1)(2)(3)(4)
10. (2)(3)(5) 11. (1)(2)(3)

選填題：A. 1 B. $\frac{15}{8}$ C. 50 D. 8 E. (4, 3) F. $\frac{1}{2}$ G. 2 H. $\sqrt{82}$ I. $\frac{1}{2}$