南區高中 107 年(106 學年度)
高三上學測聯合模擬考試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 有一數列$a_1+1\times3$，$a_2+2\times4$，$a_3+3\times5$，…，$a_k+k\times(k+2)$，…，$a_{10}+10\times12$總和爲1260，則$\sum_{k=1}^{10}a_k$之值爲？
(1)495　(2)675　(3)765　(4)820　(5)985。　【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(3)

解：$\sum_{k=1}^{10}\left(a_k+k(k+2)\right)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\dfrac{10\times11\times21}{6}+2\times\dfrac{10\times11}{2}=1260\Rightarrow\sum_{k=1}^{10}a_k=765$

2. 若m、n是整數，方程式$3x^3+mx^2+nx+2=0$的所有根都是有理根，試問序對(m,n)有幾組解？
(1)4　(2)5　(3)6　(4)7　(5)8。　【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(4)

解：由牛頓定理得知，可能有理根爲±1、±2、$\pm\dfrac{1}{3}$、$\pm\dfrac{2}{3}$

由韋達定理得知，三根之積

爲$-\dfrac{2}{3}=\left\langle\begin{array}{l}(1)(1)\left(-\dfrac{2}{3}\right),(1)(-1)\left(\dfrac{2}{3}\right),(-1)(-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right),\\(1)(2)\left(-\dfrac{1}{3}\right),(1)(-2)\left(\dfrac{1}{3}\right),(-1)(2)\left(\dfrac{1}{3}\right),(-1)(-2)\left(-\dfrac{1}{3}\right)\end{array}\right.$

3. 設2階方陣A的乘法反方陣存在，若A滿足$A^2+2A-3I=O$，I爲2階單位方陣$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$O$爲2階零方陣$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，則$A$的反方陣$A^{-1}$可表示爲？
(1)$\dfrac{1}{3}A+\dfrac{2}{3}$　(2)$\dfrac{1}{3}A-\dfrac{2}{3}$　(3)$\dfrac{2}{3}A+\dfrac{1}{3}I$　(4)$\dfrac{1}{3}A-\dfrac{2}{3}I$　(5)$\dfrac{1}{3}A+\dfrac{2}{3}I$。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(5)

解：$A^2+2A-3I=O\xrightarrow{同乘A^{-1}}A+2I-3A^{-1}=O\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{3}A+\dfrac{2}{3}I$

4. 有一顆骰子六個面上的點數分別爲1，1，2，2，2，3，且投擲這顆骰子每面出現的機率均等。連續擲此骰子兩次，在兩次點數和爲4的情況下，求第1次擲出的點數爲2的機率爲？
(1)$\dfrac{19}{36}$　(2)$\dfrac{9}{13}$　(3)$\dfrac{6}{13}$　(4)$\dfrac{1}{2}$　(5)$\dfrac{1}{4}$。　【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(2)

$\boxed{解}$：$\dfrac{3\times 3\times \frac{2!}{2!}}{\underbrace{3\times 3\times \frac{2!}{2!}}_{2配2}+\underbrace{2\times 1\times 2!}_{1配3}}=\dfrac{9}{13}$

5. 現有 A、B 兩組數據，只知下表中的資訊。

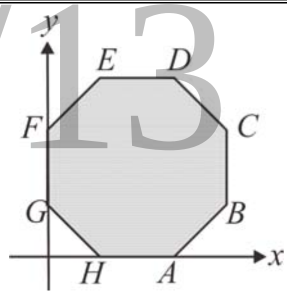
	內含資料數	最小數據	最大數據
A 組	10 筆	15	25
B 組	20 筆	35	45

若 A 組標準差的最大可能值爲 σ_A，最小可能值爲 σ_a；
而 B 組標準差的最大可能值爲 σ_B，最小可能值爲 σ_b，則下列何者正確？
(1) $\sigma_A=\sigma_B$　(2) $\sigma_A<\sigma_B$　(3) $\sigma_a=\sigma_b$　(4) $\sigma_a<\sigma_b$　(5)條件不足，無法判斷。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

$\boxed{答}$：(1)

$\boxed{解}$：當 A 組數據爲「5 個 15、5 個 25」時，有最大標準差 $\sigma_A=5$
當 A 組數據爲「1 個 15、8 個 20、1 個 25」時，有最小標準差 $\sigma_a=\sqrt{5}$
當 B 組數據爲「10 個 35、10 個 45」時，有最大標準差 $\sigma_B=5$
當 B 組數據爲「1 個 35、18 個 40、1 個 45」時，有最大標準差 $\sigma_b=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

6. 一線性規劃問題的可行解區域爲坐標平面上的正八邊形 $ABCDEFGH$ 及其內部，如圖。已知目標函數 $ax+by+3$（其中 a、b 爲實數）的最大值只發生在 B 點。請問當目標函數改爲 $3-bx+ay$ 時，最大值會發生在下列一點？
(1) C　(2) D　(3) E　(4) G　(5) H。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】



$\boxed{答}$：(2)

$\boxed{解}$：$ax+by+3$ 最大值只發生在 B 點，故 $a>0$，且斜率 $-\dfrac{a}{b}>1\Rightarrow b<0$，且 $|a|>|b|$
故 $-bx+ay+3$ 的斜率 $-1<\dfrac{b}{a}<0$，故最大值會發生在 D 點

7. 在 ΔABC 中，$\cos A=-\dfrac{3}{5}$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，$\tan\angle BAD=\dfrac{3}{4}$，求 $\overline{AD}=$
(1) $\dfrac{93}{29}$　(2) $\dfrac{94}{29}$　(3) $\dfrac{95}{29}$　(4) $\dfrac{96}{29}$　(5) $\dfrac{97}{29}$。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$\cos A=-\dfrac{3}{5}$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\tan A=-\dfrac{4}{3}\xrightarrow{\tan\angle BAD=\frac{3}{4},\sin\angle BAD=\frac{3}{5}}\angle CAD=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Delta ABC=\Delta ABD+\Delta ACD\Rightarrow \frac{1}{2}\times 6\times 8\times \frac{4}{5}=\frac{1}{2}\times 6\times \overline{AD}\times \frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times 8\times \overline{AD}\times 1\Rightarrow \overline{AD}=\frac{96}{29}$$

二、多選題

8. 下列敘述何者永遠正確？

(1)若 a 、b 爲實數且 $|a-b|<|a|+|b|$ ，則 $ab<0$

(2)存在 x 爲實數使得 $|x+5|+|x-3|=7$

(3) x 爲實數，若 $(x-1)|x-2|+|x+1|=6$ ，則 $x=3$

(4)設 x 爲實數， $f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots\cdots+|x-100|$ 。當 $50\le x\le 51$ 時，$f(x)$ 有最小值 2500

(5)若 x 、y 、z 均爲正實數，且 $x+2\sqrt{y}=y+2\sqrt{z}$ ，則 $x=y=z$ 。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

$\boxed{答}$：(3)(4)

$\boxed{解}$：(1)應爲 $ab>0$　(2)應爲 $|x+5|+|x-3|\ge 8$　(5)反例： $x=2\sqrt{2}$ 、 $y=4$ 、 $z=2$

9. 若 a 是實數，多項式 $f(x)=x(x-2)(x-4)+ax(x-2)-8x+6$，且 $f(4)>0$，則下列何者正確？

(1) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 -12　(2) $f(2+i)\ne 0$　(3) $f(x)=0$ 沒有大於 4 的根

(4) $f(x)=0$ 可能沒有負根　(5)函數圖形 $y=f(x)$ 與 $y=-x^2$ 必有交點。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

$\boxed{答}$：(2)(3)(5)

$\boxed{解}$：(1) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 -10

(2)因爲 $f(0)=6>0$ 、 $f(2)=-10<0$ 、 $f(4)>0$ ，$\deg f(x)=3$ ，且爲實係數由勘根定理、成雙定理得知， $f(x)=0$ 有三個實根，故 $f(2+i)\ne 0$

(3)(4)承(2)，且領導係數爲正，故 $f(x)=0$ 沒有大於 4 的根，必有一負根

(5) $\deg\left[f(x)+x^2\right]=3$，且爲實係數，由勘根定理、成雙定理得知，至少一實根

10. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=4$ 。請選出正確的選項。

(1)當 $\angle A=1$（弧度）時，可以確定 ΔABC 的面積

(2)當 $\tan A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 時，可以確定 ΔABC 的面積

(3)當 $\angle A=20^\circ$ 時，可以確定 $\angle B$ 的餘弦值

(4)當 $\angle A=20^\circ$ 時，可以確定 ΔABC 的外接圓半徑

(5)當 $\angle A=30^\circ$ 時，可以確定 ΔABC 的內切圓半徑。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

$\boxed{答}$：(4)(5)

$\boxed{解}$：(1) $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=4$ ，當 $\angle A=1$（弧度）時，無法構成 ΔABC

(2) $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=4$ ，當 $\tan A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 時，無法構成 ΔABC

(3) $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=4$ ，當 $\angle A=20^\circ$ 時，$\angle B$ 有兩個可能值

(4) $2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$，可以確定$\Delta ABC$的外接圓半徑

(5)當$\angle A=30^\circ$時，$\overline{AB}=8$、$\overline{BC}=4$，可以確定唯一的ΔABC，故內切圓半徑可確定

11. 空間中三直線

L_1：$\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$，$L_3$：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{1}$。

若平面E爲包含L_1與L_3的平面，平面F爲包含L_2且與L_1平行的平面，

則下列敘述何者正確？

(1) L_1與L_2爲兩相交直線　(2) L_1與L_3的交點爲$(2,1,-3)$　(3) L_2與L_3平行

(4)向量$(1,0,2)$爲平面E的一個法向量　(5)平面E與平面F平行。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(2)(3)(5)

解：(1) L_1與L_2爲兩歪斜直線　(4) $\overrightarrow{L_1}\times\overrightarrow{L_3}=(1,0,-2)$

(5)平面E：$x-2z=8$與平面F：$x-2z=5$平行

12. 關於函數$f_a(x)=\left|\log_a x^2\right|-2017$（其中$a>0$且$a\neq1$）的敘述，下列哪些是正確的？

(1) $y=f_{0.5}(x)$的圖形與$y=f_2(x)$的圖形重合

(2) $y=f_2(x)$的圖形與$y=f_3(x)$的圖形恰有兩交點

(3) $\dfrac{f_2\left(\sqrt{5}\right)+f_2\left(3\sqrt{5}\right)}{2}>f_2\left(2\sqrt{5}\right)$

(4)若$f_{2017}(x)=0$的所有實根分別爲x_1，x_2，……，x_n，則$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k>0$

(5)若$f_{2017}(x)=0$的所有實根分別爲x_1，x_2，……，x_n，則$x_1x_2\cdots\cdots x_n=1$。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(1)(2)(5)

解：(1) $\left|\log_{0.5}x^2\right|=\left|\log_2 x^2\right|$，故$y=f_{0.5}(x)$的圖形與$y=f_2(x)$的圖形重合

(2) $y=f_2(x)$的圖形與$y=f_3(x)$的圖形恰有兩交點$(1,-2017)$、$(-1,-2017)$

(3) $f_2(x)=\left|\log_2 x^2\right|-2017$凹口向下，故$\dfrac{f_2\left(\sqrt{5}\right)+f_2\left(3\sqrt{5}\right)}{2}<f_2\left(2\sqrt{5}\right)$

(4)(5) $f_{2017}(x)=0\Rightarrow\left|\log_{2017}x^2\right|=2017\Rightarrow 2\log_{2017}|x|=\pm2017\Rightarrow|x|=2017^{\pm\frac{2017}{2}}$

$\Rightarrow x=2017^{\frac{2017}{2}}$、$2017^{-\frac{2017}{2}}$、$-2017^{\frac{2017}{2}}$、$-2017^{-\frac{2017}{2}}$

則$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0$、$x_1x_2x_3x_4=1$

13. 在梯形$ABCD$中，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，$\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AB}=1$，$\angle ABC=60^\circ$。若與$\overrightarrow{BC}$同方向之單位向量爲$\vec{a}$，與$\overrightarrow{BA}$同方向之單位向量爲$\vec{b}$，與$\overrightarrow{BD}$同方向之單位向量爲$\vec{c}$。則下列哪

些是正確的？

(1)$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=-\dfrac{1}{2}$　(2)$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}$　(3)$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$　(4)$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

(5)$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$。　【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：(1)(5)

解：$B(0,0)$、$C(3,0)$、$A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$D\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，而$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{7}$

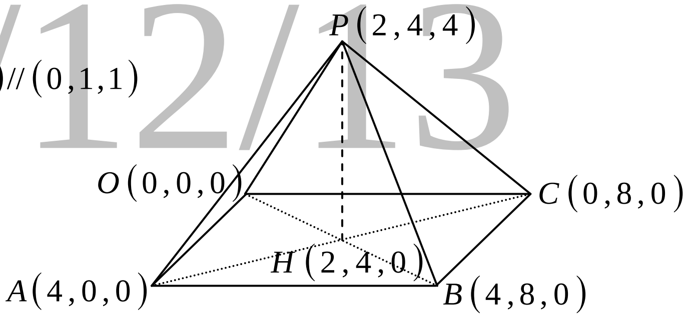
$\vec{a}=(1,0)$、$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

第貳部分：選填題

A. 空間中有一長方形$OABC$，其頂點為$O(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$C(0,8,0)$。
若P點在第一卦限且與長方形四個頂點的距離皆為6。
設通過B，C，P三點的平面方程式為$ax+by+z=d$，則數對$(a,b,d)=$________。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：$(a,b,d)=(0,1,8)$

解：$\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=(2,4,-4)\times(-2,4,-4)//(0,1,1)$
所求平面：$0x+1y+1z=8$



B. 某款虛擬實境遊戲共有20種情境；該機構宣稱任一情境的闖關成功率均為$\dfrac{1}{3}$，各情境彼此獨立，即連續通過兩關的機率為$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，連續通過三關的機率為$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$，依此類推。若連續通過$n$關可獲得獎金$\dfrac{1}{200p_n}$元（四捨五入至整數位），其中$p_n$代表連續通過$n$關的機率，則至少須連續通過________關，才可獲得超過100萬元的獎金。
【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：18

解：$\dfrac{1}{200\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}>1000000\Rightarrow 3^n>2\times10^8\Rightarrow n\log3>\log2+8\Rightarrow n>\dfrac{8.3010}{0.4771}\approx17.3\cdots$

C. 若k爲實數，且已知一雙曲線Γ_1：$(3x+y)(3x-y)=k$與一橢圓Γ_2：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1$有相同焦點$F_1$及$F_2$。若點$P$爲$\Gamma_1$和$\Gamma_2$之一交點，則$\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2=$________。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：50

解：Γ_2：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1$爲直立型橢圓，中心$(0,0)$、$a=4$、$b=\sqrt{6}$、$c=\sqrt{10}$

則$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=8 \Rightarrow \overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2+2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$

Γ_1：$-\frac{x^2}{\left(\frac{-k}{9}\right)}+\frac{y^2}{(-k)}=1$爲上下開口雙曲線，中心$(0,0)$、$c=\sqrt{10}$，故$k=-9$

則$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=6 \Rightarrow \overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=36$

故$2\left(\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2\right)=64+36 \Rightarrow \overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2=50$

D. 已知點P是平面上ΔABC內的一點，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\sqrt{3}$，$\angle BAC=30^\circ$。若$\Delta PBC$、$\Delta PCA$、$\Delta PAB$的面積分別爲2，$x$，$y$，求$\frac{9}{x}+\frac{1}{y}$的最小值爲________。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：8

解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 30^\circ=8\sqrt{3}$，故$\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|=16$

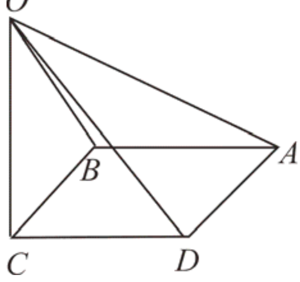
ΔABC面積$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin 30^\circ=4=2+x+y \Rightarrow x+y=2$

柯西不等式$\left[\left(\sqrt{\frac{9}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right]\ge[3+1]^2$

$\Rightarrow\left[\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\right][x+y]\ge[3+1]^2 \Rightarrow \frac{9}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{16}{2}=8$

E. 如圖，四角錐$O-ABCD$的底面是邊長2的正方形，側稜OC垂直底面，且$\overline{OC}=3$。求$\sin\angle AOB$的值爲________。（分母化爲最簡根式）

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】



答：$\frac{2}{\sqrt{17}}$

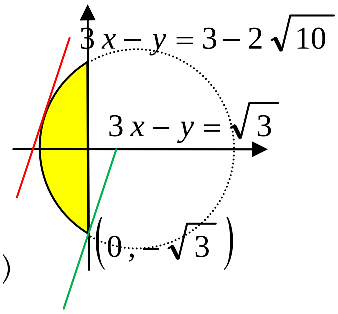
解：$\overline{OC}=3$、$\overline{CB}=\overline{CD}=2$,$\overline{CA}=2\sqrt{2}$、$\overline{OB}=\overline{OD}=\sqrt{13}$,$\overline{OA}=\sqrt{17}$

$\cos\angle AOB=\frac{\left(\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{17}\right)^2-2^2}{2\sqrt{13}\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{13}{17}}$，故$\sin\angle AOB=\sqrt{\frac{4}{17}}$

F. 設 R 代表坐標平面上由不等式 $1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0$ 所定義的區域，若函數 $f(x,y)=3x-y$ 在區域 R 上的最大值爲 M，最小值爲 m，則數對 $(M,m)=$________。（化爲最簡根式）

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：$(M,m)=\left(\sqrt{3},3-2\sqrt{10}\right)$



解：$1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0 \Rightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ -2\le y\le 2 \\ -\sqrt{4-y^2}\le x-1 \end{cases}$

當 $3x-y=k$ 與 $(x-1)^2+y^2=4$ 相切時，$k=3\pm 2\sqrt{10}$（取負）

當 $3x-y=k$ 過 $\left(0,-\sqrt{3}\right)$ 時，$k=\sqrt{3}$

G. 某公司有 6 位員工，負責今天商品展覽會早上及下午的值班，
公司在商品展覽會設置甲、乙兩個攤位，
早上需要有 4 位員工，其中 2 人值班甲攤位，另 2 人值班乙攤位；
下午也需要有 4 位員工，其中 2 人值班甲攤位，另 2 人值班乙攤位。
公司規定早上及下午來甲攤位的值班員工不可以由同一人擔任，
同時早上及下午來乙攤位的值班員工也不可以由同一人擔任，
則公司對於員工在商品展覽會的值班工作安排共________種方法。

【南區高中 107 年(106 學年度)學測聯合模擬考】

答：1710

解：

$$\underbrace{C^6_2C^4_2}_{\substack{\text{上午}\\ \text{排班}\\ \text{(例如：}\\ AB\text{甲}\\ CD\text{乙)}}}\underbrace{\left[\underbrace{C^6_2C^4_2}_{\substack{\text{下午}\\ \text{任意}\\ \text{排班}}}\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad +\underbrace{C^4_2}_{AB\text{甲}} \\ -\underbrace{C^5_1C^4_2}_{A\text{甲}}+\underbrace{C^4_1C^3_1}_{A\text{甲}C\text{乙}}-\underbrace{C^3_1}_{A\text{甲}B\text{甲}C\text{乙}} \\ -\underbrace{C^5_1C^4_2}_{B\text{甲}}+\underbrace{C^4_1C^3_1}_{A\text{甲}D\text{乙}}-\underbrace{C^3_1}_{A\text{甲}B\text{甲}D\text{乙}} \\ -\underbrace{C^5_1C^4_2}_{C\text{乙}}+\underbrace{C^4_1C^3_1}_{B\text{甲}C\text{乙}}-\underbrace{C^3_1}_{A\text{甲}C\text{乙}D\text{乙}} \\ -\underbrace{C^5_1C^4_2}_{D\text{乙}}+\underbrace{C^4_1C^3_1}_{B\text{甲}D\text{乙}}-\underbrace{C^3_1}_{B\text{甲}C\text{乙}D\text{乙}} \\ \qquad\qquad\quad +\underbrace{C^4_2}_{CD\text{乙}} \end{array}+\underbrace{1}_{A\text{甲}B\text{甲}C\text{乙}D\text{乙}}\right]}_{\text{排容原理}}=90\times 19=1710$$