# 臺中市立高級中等學校 106 學年度學科能力測驗第二次聯合複習考試

## 數 學 考 科 解 析

考試日期：106 年 12 月 18~19 日

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 5 | 245 | 135 | 34 | 23 | 45 | 1345 | 1 | 2 | 4 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 6 | 9 | 8 | 1 | 3 | - | 4 | 5 | 1 | 8 | 2 | 5 | 3 | 2 | 6 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | | | | | | |
| 1 | 5 | 7 | 1 | 5 | 1 | 6 | 7 | 5 | | | | | | |

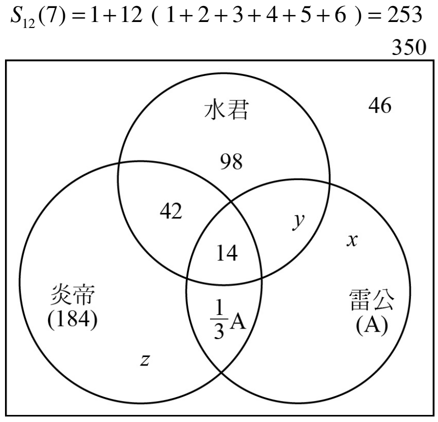
### 第壹部分：選擇題

#### 一、單選題

1. $\log\left(\dfrac{3^{361}}{2\times10^{170}}\right)=361\cdot\log3-(170+\log2)\approx1.9321\approx\log100$

2. $S_{12}(7)=1+12(1+2+3+4+5+6)=253$

3.




①$x+y+14=\dfrac{2}{3}A$

②$56+y+\dfrac{1}{3}A=82$

③$98+56+x+y+z+\dfrac{1}{3}A=350-46$

由 $56+\dfrac{1}{3}A+z=184$，代入③得

$98+184+x+y=304\Rightarrow x+y=22$

$x+y=22$ 代入①得 $A=54$，代入②得 $y=8$，$x=14$

4. $a_n=2-\dfrac{n-1}{2}\cdot\log_{10}5$

$\Rightarrow100^{a_n}=100^2\cdot100^{-\frac{n-1}{2}\cdot\log_{10}5}=10^4\cdot100^{\log_{10}5^{-\frac{n-1}{2}}}$

$\Rightarrow100^{a_n}=10^4\cdot10^{2\log_{10}5^{-\frac{n-1}{2}}}=10^4\cdot10^{\log_{10}5^{-(n-1)}}=10^4\cdot\dfrac{1}{5^{n-1}}$

$\Rightarrow b_n=8\cdot100^{a_n}=8\cdot10^4\cdot\dfrac{1}{5^{n-1}}$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{10}b_n=8\times10^4\cdot(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^9})$

$=80000\cdot\dfrac{1\cdot〔1-(\frac{1}{5})^{10}〕}{1-\frac{1}{5}}=100000〔1-(\dfrac{1}{5})^{10}〕$

$=100000-(\dfrac{2}{5})^5$

$\Rightarrow99999<\quad<100000$

故 $m$ 為 99999

5. ① 目標函數 $ax-by+1=p$

斜率 $m=\dfrac{a}{b}$，又最大值只發生在 $H$

故 $-3<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{3}$，且 $a>0$ $b<0$

② 目標函數 $2+bx+ay=q$

斜率 $m=-\dfrac{b}{a}$，可推得 $\dfrac{1}{3}<-\dfrac{b}{a}<3$

$L$ $D$ $b<0$

$L$

6. $\begin{vmatrix}a&b\\c&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a-bc=0\Rightarrow a=bc$

① 當 $a=4$ 時，則 $(b,c)=(1,4)$ $(2,2)$ $(4,1)$

② 當 $a=3$ 時，則 $(b,c)=(1,3)$ $(3,1)$

③ 當 $a=2$ 時，則 $(b,c)=(1,2)$ $(2,1)$

④ 當 $a=1$ 時，則 $(b,c)=(1,1)$

共 8 種

#### 二、多選題

7. 由絕對值不等式可得知

$|x-2|+|x+3|=|x-2|+|-x-3|\geq|(x-2)+(-x-3)|=5$

$||x-2|-|x+3||\leq|(x-2)-(x+3)|=5$

$\Rightarrow-5\leq|x-2|-|x+3|\leq5$

8. (1) $P=\dfrac{3+1}{2+3+2}=\dfrac{4}{7}$

(2) $\ell=\omega\Rightarrow P=\dfrac{\omega+1}{2\omega+2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $P=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

(4) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{6}\times\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{1}{6}$

(5) 即前 6 場各 3 勝 3 負

$P=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{7}\times\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{1}{7}$

9. $x$ 軸方程式為 $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ $t\in R$，方向向量為 $\vec{l}=(1,0,0)$

(1) $L_1:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 與 $x$ 軸交點為 $(0,0,0)$

(2) $L_2:\begin{cases}x+z=1\\y=0\end{cases}$ 與 $x$ 軸交點為 $(1,0,0)$

(3) $L_3:\begin{cases}x=0\\y+z=1\end{cases}$ 與 $x$ 軸不相交，又 $\vec{l_3}=(0,1,-1)\nparallel\vec{l}$，

故 $L_3$ 和 $x$ 軸歪斜

(4) $L_4:\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=s \end{cases}$ $s\in R$ 與 $x$ 軸不相交，又 $\overrightarrow{l_4}=(0,0,1)\,/\!\!/\,\overrightarrow{l}$，

故 $L_4$ 和 $x$ 軸歪斜

(5) $L_5:\begin{cases} x=k \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ $k\in R$ 與 $x$ 軸不相交，又 $\overrightarrow{l_5}=(1,0,0)\,/\!\!/\,\overrightarrow{l}$，

故 $L_5$ 和 $x$ 軸平行

10. (1) 可能有 2 , 4 個交點

(2) 僅可能有 1 , 2 , 3 個交點

(3) 由 $c_1^{\,2}=a^2-b^2$ 與 $c_2^{\,2}=a^2+b^2$，可得 $c_1^{\,2}+c_2^{\,2}=2a^2$，

$c_1^{\,2}$、$a^2$、$c_2^{\,2}$ 為等差

(4) 由 $\dfrac{x_P^{\,2}}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=1$ 與 $\dfrac{x_Q^{\,2}}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}=1$，可得 $x_P^{\,2}+x_Q^{\,2}=2a^2$

(5) $\Gamma_1$ 與 $\Gamma_2$ 交於兩頂點

11. (1) 轉移矩陣不一定有乘法交換律

(2) 轉移矩陣不一定有乘法反元素

(3) 馬可夫定理。

不是每個轉移矩陣均有穩定狀態，

例：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 為一個二階轉移矩陣

$\because \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k+1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$

不會趨於穩定狀態

(4) 若 $C$ , $D$ 均為轉移矩陣，則可知 $CD$ 也為轉移矩陣

由以上性質知 $A^2$ 為轉移矩陣

又 $\dfrac{A^2+B}{2}$ 每一行數字相加為 1

故 $\dfrac{A^2+B}{2}$ 也為轉移矩陣

(5) $\because$ $A^2$ 為轉移矩陣，$B^3$ 為轉移矩陣

$\therefore$ $A^2B^3$ 也為轉移矩陣

12. (1) ○，實係數奇次多項式必有實根

(2) ×，實係數多項式不一定有有理根

(3) ○，若三根均為有理數，必為 1 , 2 , 4，常數項不合，

因此必有無理根

(4) ○，$f(x)=x$ 必有實根

(5) ○，若實根為$-\alpha$，則 $f(-\alpha)-k$ 恆負，矛盾，

因此 $f(x)=k$ 必有正實根

## 第貳部分：選填題

A. $\because$ 二次方程式有兩相異實根

$\therefore D=49-4k>0 \Rightarrow k<\dfrac{49}{4}$

設兩根為 $\alpha$ , $\beta$，則 $\alpha\beta=\dfrac{1}{k}$

$\because \dfrac{5}{71}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{6}{71}$ $\quad\therefore \dfrac{71}{6}<k<\dfrac{71}{5}$

故 $\dfrac{71}{6}<k<\dfrac{49}{4}$ 又 $k\in Z$，故 $k=12$

B. $a_n$ 是首項 2，公比 2 的等比數列；

$a_n^{\,2}$ 是首項 4，公比 4 的等比數列

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,2}-\mu^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{4(4^6-1)}{4-1}-\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2(2^6-1)}{2-1}\right)^2}=\sqrt{469}$$

C. 出現 $\dfrac{1}{3}\rightarrow\dfrac{1}{2}$

出現 3 $\dfrac{1}{6}\rightarrow\dfrac{1}{4}$

出現 $\dfrac{1}{2}\rightarrow\dfrac{1}{8}$

$$\Rightarrow P=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{8}{13}$$

D. ① 繪製散佈圖，可發現需去掉 ( 13 , 12 )

② 先求 $\mu_x=\dfrac{1}{5}(8+9+10+11+12)=\dfrac{1}{5}\times 50=10$

先求 $\mu_y=\dfrac{1}{5}(11+12+10+8+9)=\dfrac{1}{5}\times 50=10$

列表如下

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i-\mu_x$ | $y_i-\mu_y$ | $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ | $(x_i-\mu_x)^2$ | $(y_i-\mu_y)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 11 | $-2$ | 1 | $-2$ | 4 | 1 |
| 9 | 12 | $-1$ | 2 | $-2$ | 1 | 4 |
| 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 8 | 1 | $-2$ | $-2$ | 1 | 4 |
| 12 | 9 | 2 | $-1$ | $-2$ | 4 | 1 |
| 合計 | | 0 | 0 | $-8$ | 10 | 10 |

$y$ 對 $x$ 的迴歸直線為

$$y-\mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)^2}\cdot(x-\mu_x)$$

$\Rightarrow y-10=\dfrac{-8}{10}(x-10)$

$\Rightarrow y=-\dfrac{4}{5}x+18$

故數對 $(m,k)=(-\dfrac{4}{5},18)$

E. $L:2x-y-2k=0$，圓與直線交於一點即是相切

$\dfrac{|2\cdot 3-4-2k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$k=\dfrac{7}{2}$，$\dfrac{-3}{2}$，所求 $\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}=2$

F. 由 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{(2,-k,-1)\cdot(2,k,-1)}{4+k^2+1}=\dfrac{5-k^2}{5+k^2}$

得 $k=1$，小長方體的長為 $7-2=5$

G. 由 $\Delta CDO$ 為等腰，$\angle DCO=\angle DOC=\theta$，

且由外角知 $\angle ODB=2\theta$

$\Delta OBD$ 為等腰，同理知 $\angle OBD=2\theta$，

則 $\angle DOC+\angle BOA=4\theta$，得 $\angle BOA=3\theta$

且 $\cos 3\theta = 4\cdot(\frac{\sqrt{15}}{4})^3 - 3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$

且 $\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 3\theta = 32 - 6\sqrt{15}$

H. $\overline{AE} : \overline{EC} = 2:3 \Rightarrow \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\cdot(\frac{5}{2}\overrightarrow{AE})$

$\Rightarrow x + \frac{5}{2}y = 1 \Rightarrow 2x + 5y = 2$ ……①

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 \Rightarrow (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

$\Rightarrow x\cdot|\overrightarrow{AB}|^2 + y\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(4^2 + 5^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$

得 $16x + \frac{5}{2}y = 8 \Rightarrow 32x + 5y = 16$ ……②

由①②得 $x = \frac{7}{15}$ ， $y = \frac{16}{75}$