台北區高中 107 年 (106 學年度)
高三上 學科能力 模擬考試題

俞克斌老師編寫

一、單選題（佔 25 分）

1. 下列那個選項的 x 值，會使得不等式 $\left(2^x-2\right)\left(8^x-4\right)\left(32^x-16\right)>0$ 成立？
   (1) 0.6　(2) 0.7　(3) 0.8　(4) 0.9　(5) 1　【107 北區學測模②】

答：(2)

解：$\left(2^x-2^1\right)\left(2^{3x}-2^2\right)\left(2^{5x}-2^4\right)>0\Rightarrow(x-1)(3x-2)(5x-4)>0$

$\Rightarrow\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{4}{5}$ 或 $x>1$

2. 有三個袋子，甲袋中有 1 個白球，1 個紅球；乙袋中有 1 個白球，1 個紅球；
   丙袋中有 2 個紅球。今隨機從三袋中選取一袋後，再從此袋中連續取球 4 次，
   每次取出 1 球記錄顏色後放回。若取出的 4 球都是紅球，
   則再從此袋中取出 1 球為白球的機率為何？
   (1) 0　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{1}{4}$　(4) $\dfrac{1}{18}$　(5) $\dfrac{1}{48}$　【107 北區學測模②】

答：(4)

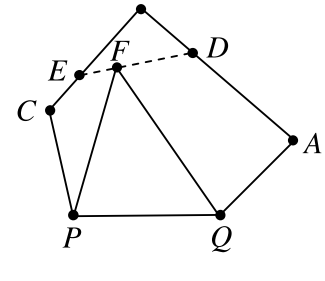
解：$$\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{2}\right)^4\times0}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{2}\right)^4}=\frac{1}{18}$$

3. 若 k 為正實數，則 $\left(-\sqrt{-k}\right)\cdot\sqrt{-1}$ 的值會等於下列那個選項？
   (1) $-\sqrt{k}$　(2) $-\sqrt{-k}$　(3) $\sqrt{k}\,i$　(4) $\sqrt{-k}$　(5) $\sqrt{k}$　【107 北區學測模②】

答：(5)

解：$\left(-\sqrt{k}\,i\right)i=\sqrt{k}$

4. 平面上五邊形 $PQABC$ 如右圖，點 D、E、F 分別在
   $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{DE}$ 上，且滿足 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{EF}}=2$。
   令 ΔPQA、ΔPQB、ΔPQC 的面積分別為 a、b、c，
   若 ΔPQF 的面積為 $\dfrac{ax+by+cz}{9}$，請選出正確的 (x,y,z) 選項。
   (1) $(1,4,4)$　(2) $(1,6,2)$　(3) $(2,3,4)$
   (4) $(2,5,2)$　(5) $(3,3,3)$　【107 北區學測模②】



答：(1)

解：$\overline{OF}=\frac{1}{3}\overline{OD}+\frac{2}{3}\overline{OE}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{OB}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overline{OB}+\frac{2}{3}\overline{OC}\right)$

$=\frac{1}{9}\overline{OA}+\frac{4}{9}\overline{OB}+\frac{4}{9}\overline{OC}$

5. 平面上有一雙曲線$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其中$a>0$，$b>0$，$a^2+b^2=1$。

已知Γ圖形通過點$P\left(2,\sqrt{3}\right)$，則貫軸長為何？

(1) $\sqrt{3}-1$　(2) $2\sqrt{3}-2$　(3) 1　(4) $\sqrt{3}+1$　(5) $2\sqrt{3}+2$ 【107 北區學測模②】

答：(2)

解：$\begin{cases}4b^2-3a^2=a^2b^2\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}\pm1\\ b=2-\sqrt{3}\end{cases}$

二、多選題（佔 35 分）

6. 若整數n滿足指數方程式$(n+1)^{106+3n}=(n+1)^{2017}$，則下列哪些選項為$n$可能的值。

(1) -2　(2) -1　(3) 0　(4) 637　(5) 1911 【107 北區學測模②】

答：(2)(3)(4)

解：當$n+1\neq1,0,-1\Rightarrow106+3n=2017\Rightarrow n=637$

當$n+1=1\Rightarrow n=0$，原式成立

當$n+1=0\Rightarrow n=-1$，原式成立

當$n+1=-1\Rightarrow n=-2$，原式不成立

7. 已知$f(x)$為二次函數，且函數$g(x)=f(x-4)+f(x+2)=4(x+1)^2+18$，

請選出正確的選項。

(1) $f(x)$的x^2項係數為 2

(2) 對所有實數x，$g(x-1)=g(-x-1)$

(3) $f(1)=f(-5)$

(4) 直線$x-1=0$為$y=f(x)$的對稱軸

(5) 拋物線$y=f(x)$的最小值為 9 【107 北區學測模②】

答：(1)(2)(3)

解：$f(x)=ax^2+bx+c\xrightarrow{f(x-4)+f(x+2)=2ax^2+(2b-4a)x+(20a-2b+2c)=4x^2+8x+22}$

故$f(x)=2x^2+8x-1=2(x+2)^2-9$，對稱軸$x=-2$、最小值為$-9$

8. 平面上有一梯形$ABCD$，其中$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AB}\neq\overline{CD}$。點$P$為平面上滿足

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{0}$的一點，請選出正確的選項。

(1) 對平面上任意點Q，$4\overline{QP}=\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}$恆成立

(2) 點 P 在 $\overline{AD}$ ，$\overline{BC}$ 的中點連接線段上

(3) 點 P 在 ΔABD ，ΔCDB 的重心連接線段中點

(4) 任意通過點 P 的直線必定平分梯形面積

(5) 四個三角形 ΔABP ，ΔBCP ，ΔCDP ，ΔDAP 面積皆相等 【107 北區學測模②】

答：(1)(2)

解：(1) $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{0}$

$\Rightarrow\left(\overline{QA}-\overline{QP}\right)+\left(\overline{QB}-\overline{QP}\right)+\left(\overline{QC}-\overline{QP}\right)+\left(\overline{QD}-\overline{QP}\right)=\overline{0}$

$\Rightarrow 4\,\overline{QP}=\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}$

(2) $\overline{QP}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overline{QA}+\dfrac{1}{2}\overline{QD}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overline{QB}+\dfrac{1}{2}\overline{QC}\right)$

$\Rightarrow\overline{QP}=\dfrac{1}{2}\overline{QM_1}+\dfrac{1}{2}\overline{QM_2}$ ，M_1、M_2 為 $\overline{AD}$ ，$\overline{BC}$ 的中點

(3) ΔABD ，ΔCDB 的重心分別為 G_1、G_2

$\Rightarrow\overline{QG_1}+\overline{QG_2}=\dfrac{1}{3}\left(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QD}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\overline{QG_1}+\dfrac{1}{2}\overline{QG_2}=\dfrac{1}{6}\overline{QA}+\dfrac{2}{6}\overline{QB}+\dfrac{2}{6}\overline{QC}+\dfrac{1}{6}\overline{QD}$

$\neq\overline{QP}=\dfrac{1}{4}\overline{QA}+\dfrac{1}{4}\overline{QB}+\dfrac{1}{4}\overline{QC}+\dfrac{1}{4}\overline{QD}$

(4)(5)承(2)，既然點 P 在 $\overline{AD}$ ，$\overline{BC}$ 中點連接線段上，

便不能平分梯形面積，上下三角形面積也不能相等（同高不等底）

9. 甲乙兩人練習 $5k$ 慢跑，甲於 A 場地練習 10 次、B 場地練習 2 次；

乙於 A 場地練習 2 次、B 場地練習 10 次。

若甲在兩場地的平均練習時間皆分別少於乙兩場地的平均練習時間，

則下列哪些選項是正確的？（假設 4 個平均時間皆相異）

(1) 甲所有練習時間的平均一定比乙所有練習時間的平均還少

(2) 甲所有練習時間的平均為甲兩場地平均值和的一半

(3) 甲所有練習時間的平均介於甲兩場地的平均值之間

(4) 甲的最快練習時間必少於乙的最快練習時間

(5) 甲所有練習時間的標準差一定比乙所有練習時間的標準差還少 【107 北區學測模②】

答：(3)

解：(1)(2)(4)(5)的反例：

	A	B	
	29	26	28.5
	30	27	27.5

10. 已知廣義角 θ ，ϕ 為同界角，且 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第一象限角，$\dfrac{\phi}{3}$ 為第四象限角，

則θ可能為下列哪些選項？

(1) 第一象限角　(2) 第二象限角　(3) 第三象限角

(4) 第四象限角　(5) $(2n-1)\times180°$（n為整數）【107 北區學測模②】

答：(2)(3)(5)

解：若θ，ϕ為第一象限角。則$\frac{\theta}{3}$，$\frac{\phi}{3}$僅能在第一、二、三象限，矛盾

若θ，ϕ為第四象限角。則$\frac{\theta}{3}$，$\frac{\phi}{3}$僅能在第二、三、四象限，矛盾

解：若θ，ϕ為第二象限角。則$\frac{\theta}{3}$，$\frac{\phi}{3}$可能在第一、二、四象限，成立

若θ，ϕ為第三象限角。則$\frac{\theta}{3}$，$\frac{\phi}{3}$可能在第一、三、四象限，成立

若θ，ϕ為$(2n-1)\times180°$。則$\frac{\theta}{3}$，$\frac{\phi}{3}$可能在第一、四象限或x軸負向，成立

11. 下列哪些選項與方程式$x+2y+3z=2017$的「正整數解的個數」相等？

(1) $a+b+c=2017$且$a>b>c$正整數解的個數

(2) $a+2b+3c=4034$正整數解個數的一半

(3) 滿足$2<x+2y<2017$的正整數格子點(x,y)個數

(4) 滿足$4<2y+3z<2017$的正整數格子點(x,y)個數

(5) $A(2017,0,0)$、$B\left(0,\frac{2017}{2},0\right)$、$C\left(0,0,\frac{2017}{3}\right)$，

在ΔABC內部（不含邊界）的格子點個數【107 北區學測模②】

答：(1)(4)(5)

解：(1)因為x、y、z為正整數，故當$(a=x+y+z)>(b=y+z)>(c=z)$時，成立

(2)因為$(a,b,c)=\begin{cases}(x+2017,y,z),\\(x+2016,y+1,z),(x+2016,y,z+1),\\(x+2015,y+2,z),(x+2015,y+1,z+1),(x+2015,y,z+2),\\\cdots\end{cases}$

必多於$x+2y+3z=2017$的「正整數解的個數」

(4)當$x=2017-2y-3z$時，成立

(3)當$3z=2017-x-2y$時，因無法確認$2017-x-2y$為3的倍數，故不成立

(5)過$A(2017,0,0)$、$B\left(0,\frac{2017}{2},0\right)$、$C\left(0,0,\frac{2017}{3}\right)$為軸上的點，

過此三點的平面，且在ΔABC內部（不含邊界）的格子點個數，

恰為$x+2y+3z=2017$的「正整數解的個數」。

12. 空間中有三個非零向量$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$，則下列哪些選項的性質正確？

(1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a}-\overline{c} \Rightarrow \overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$　　(2) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c} \Rightarrow \overline{b}=\overline{c}$

(3) $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{c} \Rightarrow \overline{b}=\overline{c}$　　(4) $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{b}\times\overline{a}$

(5) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=0$　　【107 北區學測模②】

答：(1)(5)

解：(2)內積無消去律　(3)外積無消去律　(4)外積無交換律

三、選填題（佔 40 分）

A. 令函數 $f(n)=\dfrac{10^n+9^n}{10^n-9^n}$（$n$ 為正整數），已知在 n 夠大時，

函數值 $f(n)$ 與 1 會非常接近，則滿足 $\left|f(n)-1\right|<\dfrac{1}{10}$ 的最小正整數 n 為________。

【107 北區學測模②】

答：29

解：$\left|\dfrac{10^n+9^n}{10^n-9^n}-1\right|<\dfrac{1}{10} \Rightarrow \left(\dfrac{10}{9}\right)^n>21 \Rightarrow n\left(\log 10-\log 9\right)>\log 3+\log 7$

$\Rightarrow n>\dfrac{0.4771+0.8451}{1-0.9542}\approx 28.\cdots$

B. 甲乙丙三個人分別從 1～8 連續正整數中挑選一個號碼，號碼可以相同，

並要求「甲的號碼大於丙的號碼」且「乙的號碼大於丙的號碼」。

則三個人的選擇有________種方法。　　【107 北區學測模②】

答：140

解：$\underbrace{C^8_2}_{= \ >} + \underbrace{C^8_3\times 2!}_{> \ > \quad > \ >} = 28+112=140$

C. 空間中平面 $E:4x-5y+2z=11$ 與直線 $L:\begin{cases}x+2y+z=7\\2x+y-z=5\end{cases}$ 的交點座標為________。

【107 北區學測模②】

答：$(3,1,2)$

解：$\begin{cases}4x-5y+2z=11\\x+2y+z=7\\2x+y-z=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\\z=2\end{cases}$

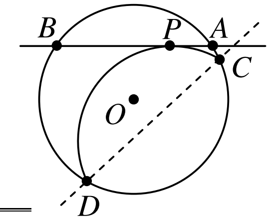
D. 設 x、y 為實數，方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & x\end{bmatrix}$ 且 $yA^{-1}=\dfrac{1}{y}A$，則數對 $\left(x,y^2\right)=$________。

【107 北區學測模②】

答：$(-3,13)$

解：$y\begin{bmatrix} x & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\times\dfrac{1}{3x-4}=\dfrac{1}{y}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}\xrightarrow{y^2=-(3x-4)}x=-3,y^2=13$

E. 將右圖中的圓 $x^2+y^2=25$ 上的劣弧 CD 沿著弦 $\overline{CD}$ 往圓心 O 摺回，摺回的弧與水平弦 $\overline{AB}$ 相切點 $P(a,3)$。若直線 CD 的斜率為 $\dfrac{7}{8}$，則 $a=$________。（化為最簡分數）【107 北區學測模②】

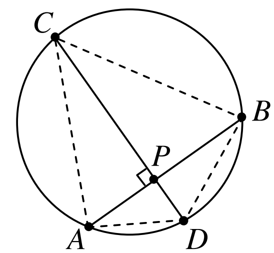


答：$\dfrac{7}{4}$

解：$\overleftrightarrow{AB}$：$y=3$，切點 $P(a,3)$，原圓半徑為 5，故摺圓圓心 $O'(a,-2)$

直線 CD 的斜率為 $\dfrac{7}{8}$，故直線 OO' 的斜率為 $\dfrac{-8}{7}=\dfrac{-2}{a}\Rightarrow a=\dfrac{7}{4}$，

F. 右圖中圓內兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 互相垂直於 P 點，且 $\tan\angle ACB=0.8$，$\overline{PA}=18$，$\overline{PB}=22$。則 $\overline{PC}-\overline{PD}=$________。【107 北區學測模②】



答：50

解：$\tan\angle ACB=\dfrac{\dfrac{18}{\overline{PC}}+\dfrac{22}{\overline{PC}}}{1-\dfrac{18}{\overline{PC}}\times\dfrac{22}{\overline{PC}}}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\overline{PC}^2-50\overline{PC}-396=0$

$\tan\angle ADB=\dfrac{\dfrac{18}{\overline{PD}}+\dfrac{22}{\overline{PD}}}{1-\dfrac{18}{\overline{PD}}\times\dfrac{22}{\overline{PD}}}=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow\overline{PD}^2+50\overline{PD}-396=0$

相減：$(\overline{PC}+\overline{PD})(\overline{PC}-\overline{PD})-50(\overline{PC}+\overline{PD})=0\Rightarrow(\overline{PC}-\overline{PD})=50$

G. 平面上 ΔABC，其中 $\overline{AB}=7$，$\angle ACB=60°$，且 $\overline{CA}$、$\overline{CB}$ 皆為整數。則符合條件的三角形有________個。
（注意：邊長 $(a,b,c)=(5,6,7)$ 與 $(6,5,7)$ 視為不同的三角形）【107 北區學測模②】

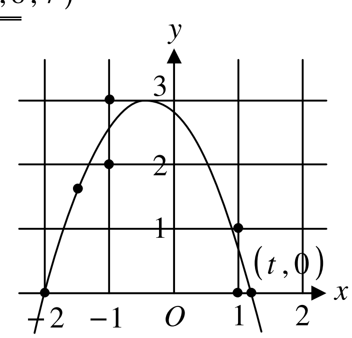
答：5

解：$\cos 60°=\dfrac{a^2+b^2-7^2}{2ab}\Rightarrow a^2+b^2=49+ab\Rightarrow(a-b)^2=49-ab$ 為完全平方數

考慮 $49-ab=0,1,4,9,16,25,36,49$

故 $(a,b,c)=(7,7,7)$ 或 $(8,5,7)$ 或 $(5,8,7)$ 或 $(8,3,7)$ 或 $(3,8,7)$

H. 平面上一粒子從點 $A(-2,0)$ 沿著開口向下的拋物線 $y=f(x)$ 的軌跡向右移動，當移動到 x 座標等於 -1 時，粒子高度（y 座標）大於 2 且小於 3；一段時間後，當 x 座標等於 1 時，



粒子高度大於 0 且小於 1。若粒子繼續移動，會經過$(t,0)$，

則t的可能範圍是________。（化為最簡分數）

【107 北區學測模②】

$\boxed{答}$：$1<t<\dfrac{7}{5}$

$\boxed{解}$：$y=f(x)=-a(x+2)(x-t)$

$\xrightarrow{a>0}\begin{cases}2<f(-1)=-a(-1-t)<3\\0<f(1)=-3a(1-t)<1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2}{t+1}<a<\dfrac{3}{t+1}$且$0<a<\dfrac{1}{3(t-1)}$，

$\xrightarrow{t>1}\dfrac{2}{t+1}<\dfrac{1}{3(t-1)}$且$0<\dfrac{3}{t+1}$，則$1<t<\dfrac{7}{5}$