

臺北區 107 學年度第一學期第二次學科能力測驗



第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

- 絕對值不等式 $x > |x-1|$ 的解為何？(1) $0 < x < \frac{1}{2}$ (2) $x < \frac{1}{2}$ (3) $x > \frac{1}{2}$
(4) $x < 0$ (5) $x > 0$
- 多項式函數 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 23x + 28$ ，則 $f(-1.99)$ 之值的小數點以下第二位數字為何？
(1)6 (2)7 (3)8 (4)9 (5)0
- 設 x, y 均為正實數且滿足 $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ，則 $\log_2 8x + \log_2 \sqrt{2}y$ 的最大值為何？
(1)1 (2) $\frac{3}{2}$ (3)2 (4) $\frac{5}{2}$ (5) $\frac{7}{2}$
- 在坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O ，半徑為 r 的圓，若 $\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，試求 $\triangle ABC$ 最小角的餘弦值為何？
(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{3}$
- 設銳角三角形 ABC 的三邊長皆為正整數，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $2\overline{AB} = \overline{BC} + 4$ ，試問這樣的三角形 ABC 共有幾個？(1)0 (2)1 (3)2 (4)3 (5)4
- 學校某社團對於在學期中非社員要申請加入該社團，採取由幹部記名投票來決定是否能通過成為新社員，方式如下：
 - 出席表決的幹部人數必須至少為全體幹部人數的四分之三。
 - 出席表決的幹部只能投票同意或投票不同意，不可棄權或不表示意見。
 - 同意票數必須多於不同意票數。同時符合以上三條件方可獲准加入該社團。今有非社員小華申請加入該社團，而本學期全體幹部共八人，若小華獲准加入該社團的記名投票方式有 n 種，則
(1) $n < 1000$ (2) $1000 < n < 1100$ (3) $1100 < n < 1200$
(4) $1200 < n < 1300$ (5) $1300 < n < 1400$
- 設 P, Q 為直線 $L: \begin{cases} x-2y-3z = -21 \\ 2x+3y+z = 21 \end{cases}$ 上兩點，且 $\overline{PQ} = 5\sqrt{3}$ 。令 O 為原點，若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最小值為 m ，則 m 最接近的正整數為下列哪一個選項？
(1) 21 (2) 22 (3) 23 (4) 24 (5) 25

二、多選題（占 30 分）

- 摸彩箱中有大小、材質相同的彩球 20 顆，其中有 3 顆紅球，每顆可兌換 100 元彩金，有 5 顆藍球，每顆可兌換 50 元彩金，剩餘的白球每顆可兌換 10 元彩金。今從箱中一次取出 2 顆彩球，若每一顆彩球被取出的機率均等，試選出下列正確的兌換彩金的機率。
(1) 兌換 200 元彩金的機率為 $\frac{C_2^3}{C_2^{20}}$ (2) 兌換 150 元彩金的機率為 $\frac{C_1^3 C_1^5}{C_2^{20}}$

(3) 兌換 100 元彩金的機率為 $\frac{P_2^5}{P_2^{20}}$ (4) 兌換 60 元彩金的機率為 $\frac{P_1^5 P_1^{12}}{P_2^{20}}$

(5) 兌換 30 元彩金的機率為 $\frac{C_2^{12}}{C_2^{20}}$

9. 有 30 對數據 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 30$, 其算術平均數 $\mu_x = 4$, $\mu_y = 5$, x 與 y 的相關係數 $r = 0.8$, 且 y 對 x 的迴歸直線過點 $(3, 3)$, 請選出正確敘述的選項。

- (1) y 對 x 的迴歸直線過點 $(1, 5)$ (2) y 對 x 的迴歸直線為 $y = 2x + 3$
 (3) y 的標準差小於 x 的標準差
 (4) 將數據經線性調整所得之數據為 $(2x_i + 3, 4 - 5y_i)$, $i=1, 2, \dots, 30$, 則其相關係數仍為 0.8
 (5) 若將數據標準化所得之標準化數據為 (x'_i, y'_i) , $i=1, 2, \dots, 30$, 則 y' 對 x' 迴歸直線的斜率 $m' = 0.8$

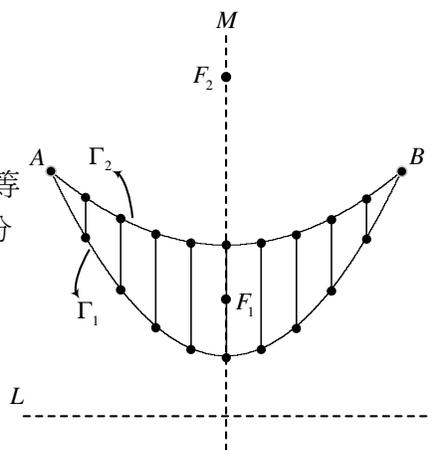
10. 已知一個三角形的三邊所在直線分別為 $L_1: 3x + 4y = 91$ 、 $L_2: 4x - 3y + 62 = 0$ 以及 $L_3: y = 10$ 。若點 $P(a, b)$ 落在三角形的內部或是邊上, 請從下列各選項中的點, 選出必在此三角形的內部或邊上者。

- (1) $(a+1, b)$ (2) $(a, b-1)$ (3) $(a+1, b-1)$ (4) $(1, b)$ (5) $(a, 10)$

11. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式, 且 $f(2-i) = 2$, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$, 請選出正確敘述的選項。

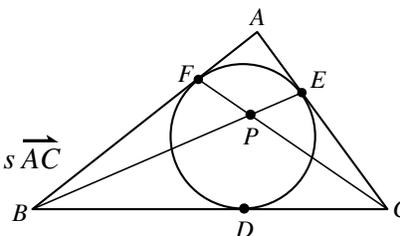
- (1) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 2 (2) $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 5$ 的餘式為 2
 (3) $f(x)$ 除以 $x^2 - x$ 的餘式為 $5x - 3$ (4) 方程式 $f(x) = 0$ 有負實根
 (5) 方程式 $f(x) = 0$ 有有理根

12. 某建築物外牆面有如右圖的設計圖樣, 此圖由具有共同準線 L 與共同對稱軸 M 的兩拋物線 Γ_1 、 Γ_2 及 9 根鐵條所構成, 且所有鐵條所在直線與 L 垂直。點 A 、 B 為 Γ_1 、 Γ_2 的交點, 且 A 點與最左一根鐵條所在直線、 B 點與最右一根鐵條所在直線, 以及相鄰的兩鐵條所在直線均等距離。已知 Γ_1 、 Γ_2 焦點依序為 F_1 、 F_2 。若 $\overline{AB} = 300$ 公分, 且 B 點到準線 L 的距離為 170 公分, 請選出正確敘述的選項。



- (1) $\overline{F_1 F_2} = 170$ 公分 (2) Γ_1 的焦距為 55 公分
 (3) Γ_2 的焦距為 125 公分
 (4) 這 9 根平行鐵條中, 最長的是 80 公分
 (5) 這 9 根平行鐵條中, 最短的是 31.2 公分

13. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{AC} = 5$, 其內切圓與 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 的切點分別為 D 、 E 、 F , 連接 \overline{BE} 與 \overline{CF} 交於點 P , 若 $\overline{AD} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$, 且 $\overline{AP} = t\overline{AB} + s\overline{AC}$, 請選出正確敘述的選項。



(1) $\overline{AE} = \overline{AF} = 2$ (2) $(x, y) = (\frac{5}{11}, \frac{6}{11})$ (3) t, s 滿足關係式 $t + \frac{5}{2}s = 1$

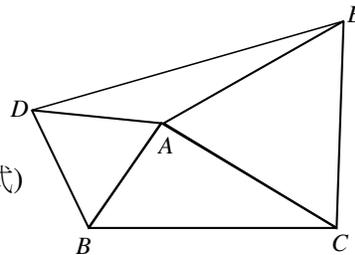
(4) $(t, s) = (\frac{8}{13}, \frac{2}{13})$ (5) A, P, D 三點共線

第貳部分：選填題（占 35 分）

A. 設 A_1, A_2, A_3, \dots 皆為二階方陣，已知 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ 且 $A_k = 2A_{k-1} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ， $k \geq 2$ ， k 為正整數，試求 A_4 的行列式值為_____。

B. 有一闖關遊戲，每位參賽者要依序過三關，每通過一關者才能繼續參加下一關挑戰，已知第一關、第二關、第三關被淘汰的機率分別是 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{9}{10}$ ，且每一關過關與否不互相影響。若已知大雄被淘汰了，則他是在第二關被淘汰的條件機率為_____。
(化為最簡分數)

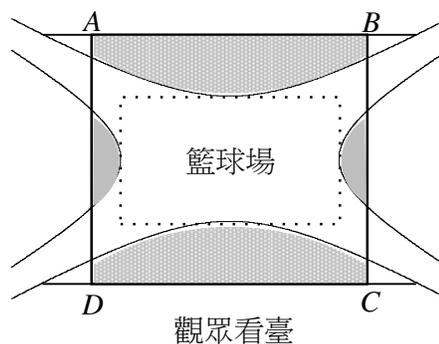
C. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{AC} = 5$ ，以 \overline{AB} 為一邊向外做正三角形 ABD ，再以 \overline{AC} 為一邊向外做正三角形 ACE ，連 \overline{DE} ，示意圖如右。試求四邊形 $DECB$ 的面積為_____。(化為最簡根式)



D. 已知 $P(a, b)$ 為圓 $C: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 上一點，若 $3a - 4b$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ _____。

E. 考慮 x, y, z 的方程組 $\Gamma: \begin{cases} \log_2 x - \log_3 y + \log_5 z = 1 \\ 2\log_2 x + \log_3 y - \log_5 z = 2 \\ 2\log_2 + 3\log_3 y + a \log_5 z = 2 \end{cases}$ ，其中 a 為實數且 $a \neq -3$ ，若 (x_0, y_0, z_0) 為此方程組的解，則 $2x_0 + 3y_0 + 4z_0 =$ _____。

- F. 國際籃球總會在 1984 年正式確認標準籃球場地板的規格為長 28 公尺，寬 15 公尺，若今猿熊建設想在捷運站附近買地蓋一座標準籃球場，並且規劃觀眾看臺為兩共軛雙曲線與其正焦弦所在直線圍出的部分範圍，如右圖所示的陰影區域，而矩形 $ABCD$ 為設計師規劃的整個建築用地，其各邊所在直線恰好平行籃球場的各邊，則矩形 $ABCD$ 的面積為 _____ 平方公尺。(註：正焦弦所在的直線是指過焦點且與雙曲線貫軸垂直的直線)



- G. 已知數列 $\langle a_n \rangle$: 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40, 81, ……。 $\langle a_n \rangle$ 的每一項是由一個 3 的非負整數次方或由幾個相異 3 的非負整數次方之和所組成，並且數列按照由小到大排列。即數列的前幾項是

$$3^0 (= 1),$$

$$3^1 (= 3),$$

$$3^0 + 3^1 (= 4),$$

$$3^2 (= 9),$$

$$3^0 + 3^2 (= 10),$$

$$3^1 + 3^2 (= 12),$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 (= 13),$$

$$3^3 (= 27),$$

$$3^0 + 3^3 (= 28),$$

$$3^1 + 3^3 (= 30),$$

$$3^0 + 3^1 + 3^3 (= 31),$$

$$3^2 + 3^3 (= 36),$$

$$3^0 + 3^2 + 3^3 (= 37),$$

$$3^1 + 3^2 + 3^3 (= 39),$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 (= 40),$$

$$3^4 (= 81),$$

……

試求此數列的第 100 項 $a_{100} =$ _____。

RA488 臺北區 107 學年度第一學期第二次學科能力測驗 參考答案

一、1. (3) 2. (2) 3. (4) 4. (1) 5. (5) 6. (4) 7. (3)

二、8. (1)(2)(3) 9. (5) 10. (4)(5) 11. (1)(2)(3) 12. (3)(4) 13. (1)(3)(5)

三、A. -19 B. $\frac{30}{73}$ C. $16\sqrt{3}$ D. 50 E. 11 F. 1009 G. 981