數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)	(4)	(3)	(1)(2)(3)	(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(4)(5)	(1)(2)(3)	(3)(4)	(1)(3)(5)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式的解法

解析：$x>|x-1|\Rightarrow x^2>(x-1)^2$

$\Rightarrow x^2>x^2-2x+1\Rightarrow 2x>1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$

故選(3)。

2. (2)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的變形(綜合除法)與小數求值

解析：$\because f(x)=(x+2)^3+(x+2)^2+7(x+2)+2$

$\Rightarrow f(-1.99)=(0.01)^3+(0.01)^2+7(0.01)+2$

$=2.070101$

$\therefore$小數點以下第二位數字為 7

故選(2)。

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & +7 & +23 & +28 & -2 \\
 & -2 & -10 & -26 & \\
\hline
1 & +5 & +13 & +2 & \\
 & -2 & -6 & & \\
\hline
1 & +3 & +7 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
1 & +1 & & &
\end{array}
$$

3. (4)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：熟悉對數的性質，會使用算幾不等式

解析：由算幾不等式知，

$$1=4x^2+\frac{1}{4}y^2\geq 2\sqrt{(4x^2)\left(\frac{1}{4}y^2\right)}=2xy\Rightarrow xy\leq\frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_2 8x+\log_2\sqrt{2}y=\log_2 8\sqrt{2}xy\leq\log_2\left(2^{\frac{7}{2}}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

故選(4)。

4. (1)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量長度與內積的應用

解析：由 $\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，作圖如右，可知最小角為$\angle B$，

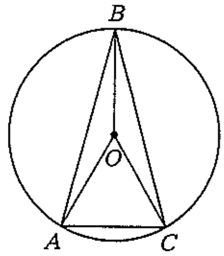
且$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=|-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}|\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|^2+2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OB}|^2$

$\Rightarrow 2r^2+2r^2\cos\angle AOC=3r^2\Rightarrow\cos\angle AOC=\frac{1}{2}$

$\therefore\angle AOC=60^\circ\Rightarrow\angle B=30^\circ$

故$\triangle ABC$最小角的餘弦值$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故選(1)。



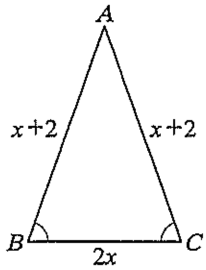
5. (5)

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角邊角關係、餘弦定理

解析：設 $\overline{AB}=\overline{AC}=x+2$，$\overline{BC}=2x$



邊長為正且三邊滿足三角不等式

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2>0\\2x>0\\(x+2)+(x+2)>2x\\(x+2)+2x>x+2\end{cases}\Rightarrow x>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

又∵$\angle B=\angle C$ 必為銳角(否則三角形內角和大於 180°)

∴只要看 $\angle A<90^\circ$ 的條件即可：

$(x+2)^2+(x+2)^2>(2x)^2\Rightarrow 2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2} \cdots\cdots\cdots\cdots ②$

由①、②得：$0<x<2+2\sqrt{2}\approx 4.8$

∵$x\in N$ ∴$x=1$，2，3，4

$\Rightarrow$ 三角形 ABC 三邊長 $(3,3,2)\vee(4,4,4)\vee(5,5,6)\vee(6,6,8)$ 共 4 個

故選(5)。

6. (4)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：題目的閱讀、分類討論、完全相異物的組合

解析：出席表決的幹部人數必須至少為 $8\times\frac{3}{4}=6$，所以

出席表決幹部人數	6	7	8
記名過半同意票數	4，5，6	4，5，6，7	5，6，7，8
記名投票方式的總數	$C_6^8(C_4^6+C_5^6+C_6^6)$	$C_7^8(C_4^7+C_5^7+C_6^7+C_7^7)$	$C_8^8(C_5^8+C_6^8+C_7^8+C_8^8)$
小計	616	512	93

故小華獲准加入該社團的記名投票方式有 $616+512+93=1221$ 種

故選(4)。

7. (3)

難易度：難

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：由兩面式求出直線的參數式，藉由參數式的假設列出距離條件，結合空間向量形成二次函數求出最小值

解析：由題意求出直線 L：$\begin{cases}x=-3+t\\y=9-t\\z=t\end{cases}$，$t\in R$

設 $P(-3+t,9-t,t)$，$Q(-3+s,9-s,s)$

$\Rightarrow \overline{PQ}^2=3(t-s)^2=75\Rightarrow t-s=\pm5$，取 $t=s+5$

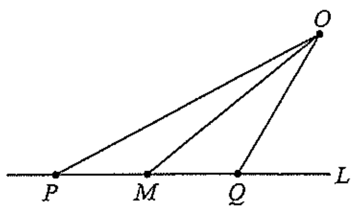
又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-3+t)(-3+s)+(9-t)(9-s)+ts=3s^2-9s+30=3\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{93}{4}$

故得最小值為 $\frac{93}{4}=23.25$

故選(3)。

〈另解〉

取 $\overline{PQ}$ 中點 M



則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ})$

$=|\overrightarrow{OM}|^2+(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$

$=\overline{OM}^2+0-\frac{1}{4}\overline{PQ}^2\geq d^2(O,L)-\frac{1}{4}\overline{PQ}^2$

又取 L 上一點 $A(-3,9,0)$，一方向向量 $\overrightarrow{v}=(1,-1,1)$

則 $\overrightarrow{AO}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 所成平行四邊形的高$=\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{AO}|^2|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{v})^2}}{|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sqrt{126}}{\sqrt{3}}=\sqrt{42}$

即 $d(O,L)=\sqrt{42}$

則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq d^2(O,L)-\dfrac{1}{4}\overline{PQ}^2=42-\dfrac{1}{4}\times75=\dfrac{93}{4}=23.25$

故最小值為 23.25

故選(3)。

二、多選題

8. (1)(2)(3)

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：認識排列、組合的符號與古典機率的計算

解析：本試驗的樣本數為 C_2^{20}

(1)○：∵兌換 200 元表示取出 2 顆紅球，其樣本數$=C_2^3$

∴機率為 $\dfrac{C_2^3}{C_2^{20}}$

(2)○：∵兌換 150 元表示取出 1 顆紅球與 1 顆藍球，其樣本數$=C_1^3C_1^5$

∴機率為 $\dfrac{C_1^3C_1^5}{C_2^{20}}$

(3)○：∵兌換 100 元表示取出 2 顆藍球，其樣本數$=C_2^5$

∴機率為 $\dfrac{C_2^5}{C_2^{20}}=\dfrac{P_2^5}{P_2^{20}}$

(4)╳：∵兌換 60 元表示取出 1 顆藍球與 1 顆白球，其樣本數$=C_1^5C_1^{12}$

∴機率為 $\dfrac{C_1^5C_1^{12}}{C_2^{20}}$

(5)╳：∵兌換 30 元表示取出 3 顆白球，在本試驗中屬不可能事件

∴機率為 0

故選(1)(2)(3)。

9. (5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：能知道相關係數與迴歸直線的定義，以及線性調整對於標準差的影響

解析：(1)╳(2)╳：因為迴歸直線必過 (μ_X,μ_Y)，又過點 $(3,3)$，

可求出迴歸直線之斜率 $m=\dfrac{5-3}{4-3}=2$

∴迴歸直線為 $y=2x-3$ 且 $(1,5)$ 帶入此方程式不符合

因此迴歸直線不過點 $(1,5)$

(3)╳：$\because m=r\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow 2=0.8\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\sigma_Y>\sigma_X$

(4)╳：$\because 2\times(-5)<0\quad\therefore r'=-r=-0.8$

(5)○：$\because x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}$，且 $\dfrac{1}{\sigma_X}\times\dfrac{1}{\sigma_Y}>0\Rightarrow r'=r$

而此時 $\sigma_X'=\sigma_Y'=1$

$\therefore m'=r'\times\dfrac{\sigma_Y'}{\sigma_X'}=r=0.8$

故選(5)。

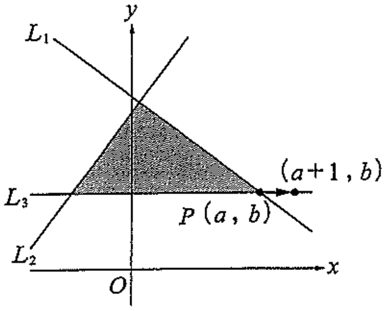
10. (4)(5)

難易度：中

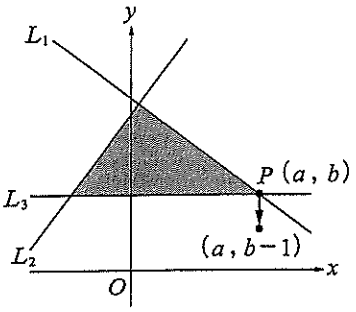
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：平面坐標上平移、投影概念的應用

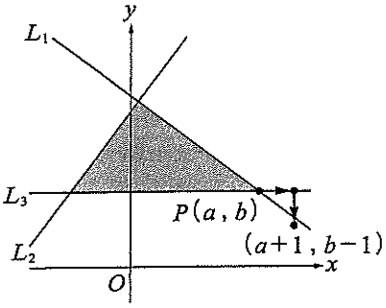
解析：(1) ╳：



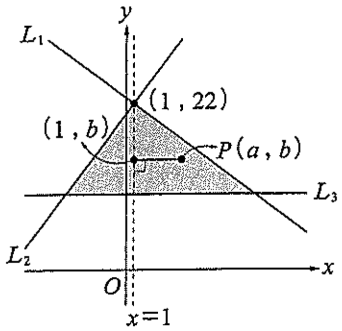
(2) ╳：



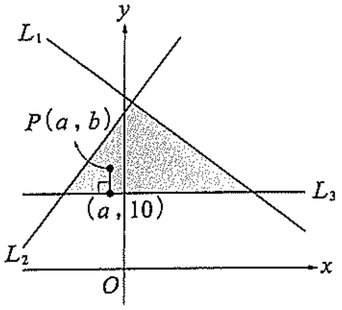
(3) ╳：



(4) ○：



(5) ○：



故選(4)(5)。

11. (1)(2)(3)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理、虛根共軛成對定理、牛頓定理的應用

解析：$\because f(2-i)=2$

$\therefore 2-i$ 為實係數方程式 $f(x)-2=0$ 之根

由虛根共軛成對定理知：$2+i$ 亦為根

$\therefore$ 可令 $f(x)-2=(x-(2-i))(x-(2+i))(ax+b)=(x^2-4x+5)(ax+b)$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+5)(ax+b)+2$

又 $\because f(0)=-3 \Rightarrow 5b+2=-3 \Rightarrow b=-1$

$f(1)=2 \Rightarrow 2(a+b)+2=2 \Rightarrow a=1$

$\therefore f(x)=(x^2-4x+5)(x-1)+2=x^3-5x^2+9x-3$

(1) ○：由餘式定理知餘式為 $f(1)=2$

(2) ○：$f(x)=(x^2-4x+5)(x-1)+2$ 除以 x^2-4x+5 的餘式為 2

(3) ○：$f(x)=x(x-1)q(x)+(hx+k)$

$f(0)=k=-3$，$f(1)=h+k=2 \Rightarrow h=5$ $\therefore$ 餘式為 $5x-3$

(4) ╳：$f(x)=x^3-5x^2+9x-3=x(\underbrace{x^2-5x+9}_{\text{恆正}})-3$

$\Rightarrow f(x)<0$ 當 $x<0$ $\therefore f(x)=0$ 沒有負實根

(5) ╳：由牛頓定理知可能的有理根為 ±1，±3，但 $f(\pm1)\neq0$，$f(\pm3)\neq0$ $\therefore f(x)=0$ 沒有有理根

故選(1)(2)(3)。

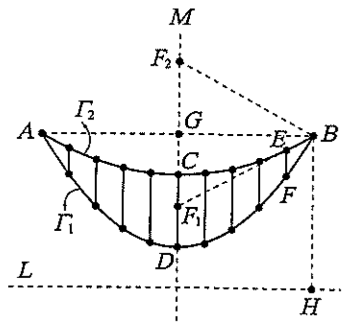
12. (3)(4)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：拋物線的定義與方程式

解析：作 $\overline{BH}\perp L$，連 $\overline{BA}$，$\overline{BF_1}$，$\overline{BF_2}$，設 $\overline{BA}$，M 交於 G



由拋物線的定義知 $\overline{BF_1}=\overline{BF_2}=\overline{BH}=170$ 公分，

又 $\overline{BG}=\dfrac{1}{2}\overline{BA}=150$ 公分且 $\overline{BG}\perp\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow \overline{F_1F_2}=2\overline{F_2G}=2\sqrt{170^2-150^2}=160$ 公分

設 Γ_1，Γ_2 的焦距 $\overline{F_1D}$，$\overline{F_2C}$ 分別為 a 公分及 b 公分

$d(G,L)=2a+80=2b-80=170 \Rightarrow a=45$，$b=125$

最長的鐵條 $\overline{CD}=d(C,L)-d(D,L)=\overline{F_2C}-\overline{F_1D}=125-45=80$ 公分

故可設 D 為原點，並設 $\begin{cases}\Gamma_1: x^2=4\times45y\\ \Gamma_2: x^2=4\times125(y-80)\end{cases}$

E、F 的 x 坐標為 $\dfrac{4}{5}\times150=120$ 分別代入 Γ_1，Γ_2，分別解得 $y=80$，108.8

得最短的鐵條 $\overline{EF}=108.8-80=28.8$ 公分

故選(3)(4)。

13. (1)(3)(5)

難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：線性組合、共線性質與分點公式的應用

解析：(1) ○：因為 $\overline{AF}+\overline{BF}=6$，$\overline{BD}+\overline{CD}=7$，$\overline{AE}+\overline{CE}=5$

且由切線段等長知 $\overline{AF}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CE}=\overline{CD}$

解得 $\overline{AF}=\overline{AE}=2$，$\overline{BD}=\overline{BF}=4$，$\overline{CE}=\overline{CD}=3$，故(1)正確

(2) ╳：由(1)，$\overline{BD}=4$，$\overline{CD}=3$ 得到 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$，故不正確

(3) ○：由(1)，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}+\dfrac{5s}{2}\overrightarrow{AE}$

又 B，P，E 三點共線，故 $t+\dfrac{5}{2}s=1$

(4) ╳：同(3)方法可得 $\overrightarrow{AP}=3t\overrightarrow{AF}+s\overrightarrow{AC}$，$3t+s=1$，解得 $(t,s)=\left(\dfrac{3}{13},\dfrac{4}{13}\right)$

(5) ○：由(2)、(4)得到 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{13}\overrightarrow{AD}$，故 A，P，D 三點共線

故選(1)(3)(5)。

第貳部分：選填題

A. -19

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的基本運算

解析：$A_2=2A_1-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\6&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\4&9\end{bmatrix}$

$A_3=2A_2-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\8&18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\6&13\end{bmatrix}$

$A_4=2A_3-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\12&26\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\10&21\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A_4)=21-40=-19$。

B. $\dfrac{30}{73}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：知道獨立事件的定義，以及能夠使用貝氏定理

解析：P(在第二關被淘汰 | 被淘汰)

$$=\frac{P(\text{在第二關被淘汰}\cap\text{被淘汰})}{P(\text{被淘汰})}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}}=\frac{30}{73}\text{。}$$

C. $16\sqrt{3}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理與三角形面積公式的運用

解析：$\cos\angle BAC=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle BAC=120^\circ$

$\angle DAE=360^\circ-60^\circ-60^\circ-120^\circ=120^\circ$

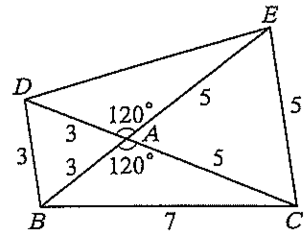
$\triangle ABC\cong\triangle ADE$

四邊形面積$=2\times\triangle ABC$ 面積$+\triangle ABD$ 面積$+\triangle ACE$ 面積

$=2\times\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times5^2$

$=\dfrac{15}{2}\sqrt{3}+\dfrac{9}{4}\sqrt{3}+\dfrac{25}{4}\sqrt{3}$

$=16\sqrt{3}$。



D. 50

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：求已知斜率之圓的切線

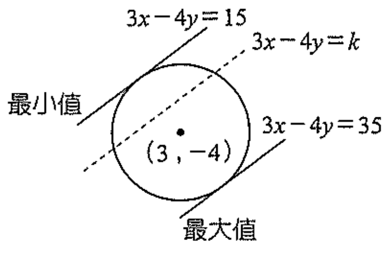
解析：本題可視為直線 L：$3x-4y=k$ 為圓 C 的切線，求 k 之值

圓 C：$(x-3)^2+(y+4)^2=4$，圓心 $O(3,-4)$，半徑 2

$\therefore d(O,L)=2\Rightarrow\dfrac{|3\times3-4(-4)-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\Rightarrow|9+16-k|=10\Rightarrow k=15\vee35$

$\therefore m=15$，$M=35$，$35+15=50$。



〈另解〉

由柯西不等式

$[(x-3)^2+(y+4)^2][3^2+(-4)^2]\geq[3(x-3)+(-4)(y+4)]^2$

$\Rightarrow 4\times25\geq(3x-4y-25)^2\Rightarrow10\geq3x-4y-25\geq-10$

$\Rightarrow35\geq3x-4y\geq15$

故 $M+m=50$。

E. 11

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：三元一次聯立方程式的解法、對數的基本定義

解析：令 $A=\log_2 x$，$B=\log_3 y$，$C=\log_5 z$

$$\begin{cases} A-B+C=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ 2A+B-C=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \\ 2A+3B+aC=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

①＋② $\Rightarrow 3A=3 \Rightarrow A=1 \Rightarrow \log_2 x=1 \Rightarrow x=2$

代回①得：$-B+C=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$④

③－② $\Rightarrow 2B+(a+1)C=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑤

若 $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{1}{a+1}$ $(\Leftrightarrow a \neq -3)$ 時，恰有一解：

④×2＋⑤ $\Rightarrow (a+3)C=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \log_5 z=0 \Rightarrow z=1$

代回④ $\Rightarrow B=0 \Rightarrow \log_3 y=0 \Rightarrow y=1$

$\therefore 2x_0+3y_0+4z_0=2\times2+3\times1+4\times1$

$=11$。

F. 1009

難易度：易

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：共軛雙曲線的性質

解析：規劃用地為邊長 $2c$ 的正方形

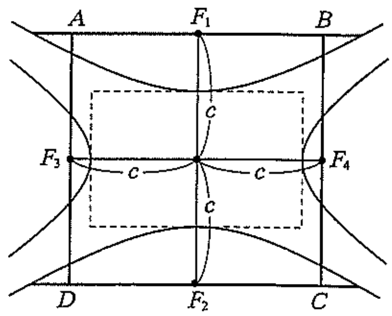
其面積 $=(2c)^2=4c^2=4(a^2+b^2)$

$=4\left(\left(\dfrac{28}{2}\right)^2+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right)$

$=4(14^2+7.5^2)$

$=4(252.25)$

$=1009$。



G. 981

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：觀察數列的規律

解析：$\because 3^k$ 是第 2^k 項，$k=0$，1，2，3，4，5，……

$\therefore$ 第 100 項在 3^6 (第 64 項)和 3^7 (第 128 項)之間

其中每一項皆有 3^6

又不含有 3^5 的有 $2^5-1=31$ 項且 $64+31=95$，即第 95 項是 $3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^6$

$\therefore$ 第 100 項是含有 3^5 開始的第 5 項 $=3^2+3^5+3^6=981$。

（事實上，第 96 項是 $3^5+3^6=972$

第 97 項是 $3^0+3^5+3^6=973$

第 98 項是 $3^1+3^5+3^6=975$

第 99 項是 $3^0+3^1+3^5+3^6=976$）