

全國高中 109 年(108 學年度)

高三上學測模擬考數學(108-E4)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

1. 甲、乙兩校依據教育部規定，在每一週星期一至五的早自習中固定選擇 2 天，由學生自主規劃運用，以培養主動學習的精神。若兩校選擇自主規劃的時間為獨立事件，試問甲、乙兩校選擇的 2 天中恰有 1 天相同的機率為何？

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{7}{10}$ (5) $\frac{4}{5}$ 。

答：(3)

解：
$$\frac{C_1^5 [C_2^4 \times 2!]}{C_2^5 C_2^5} = \frac{\text{有共同一日}[\text{其餘四日選二日}]}{\text{甲、乙各選 2 日}} = \frac{3}{5}$$

2. 試問有多少個整數 n ，可以使得 $6000 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ 為整數？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個。

答：(5)

解：原數 $= 2^4 \times 3^1 \times 5^3 \times \left(\frac{5}{2 \times 3}\right)^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 1, -1, -2, -3, 0$

3. 空間中， $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 皆為非零向量，已知 $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{OC}$ ， $\vec{OB} \times \vec{OC} = \vec{OA}$ ，且 $\vec{OC} \times \vec{OA}$ 與 $\vec{OB}$ 平行。若 $|\vec{OA}| = 4$ ，且令 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 所張成的四邊形面積為 T_1 ， $\vec{OA}$ 、 $\vec{OC}$ 所張成的四邊形面積為 T_2 ， $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 所張成的四邊形面積為 T_3 ，則 $T_1 + T_2 + T_3$ 之值為下列哪一個選項？

(1) 12 (2) 16 (3) 20 (4) 24 (5) 32。

答：(4)

解： $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 兩兩互相垂直

$$\begin{cases} |\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OC}| \Rightarrow |\vec{OA}| |\vec{OB}| = |\vec{OC}| \\ |\vec{OB} \times \vec{OC}| = |\vec{OA}| \Rightarrow |\vec{OB}| |\vec{OC}| = |\vec{OA}| \end{cases} \xrightarrow{|\vec{OA}|=4} \begin{cases} |\vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OC}| = 4 \end{cases}$$

所求 $= 4 \times 1 + 4 \times 4 + 1 \times 4 = 24$

4. 有一個猜英文字母的遊戲，進行的方式是給定 10 張卡片，上面分別寫著 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 BC 、 BD 、 BE 、 CD 、 CE 、 DE 。主持人先從這 10 張卡片中任意抽選一張，由小淳來猜測這張卡片上的字母，每經過一分鐘，主持人會給小淳一個提示，提示方法是主持人會寫下兩個字母，例如提示 AB ，則表示主持人所抽的卡片上必定有字母 A 或 B ，因此小淳可以推測出主持人所抽的卡片可能是 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 BC 、 BD 、 BE 這 7 種可能。已知遊戲過程中，主持人每經過一分鐘給出的提示依序為 AB 、 CD 、 AC 、

BD 、 CE 、 BC 、 BE ，請問小淳最早在哪一個提示時，就可以確實推測出主持人所抽的卡片為 BC ？

(1) BE (2) BC (3) CE (4) BD (5) AC 。

答：(3)

解：提示 $AB \rightarrow$ 可能 AB ， AC ， AD ， AE ， BC ， BD ， BE

提示 $CD \rightarrow$ 剩下 AC ， AD ， BC ， BD

提示 $AC \rightarrow$ 剩下 AC ， AD ， BC

提示 $BD \rightarrow$ 剩下 AD ， BC

提示 $CE \rightarrow$ 剩下 BC

5. 在坐標平面上，若直線 L 通過點 $\left(2, 2^a\right)$ 與 $\left(4, 4^a\right)$ ，且與直線 $M: 2x + 6y = 5$ 垂直，則 a 的值為下列哪一個選項？

(1) $\log_3 2$ (2) $\log_2 3$ (3) $\log_5 2$ (4) $\log_2 5$ (5)無法判斷。

答：(2)

解：斜率 $=\frac{4^a - 2^a}{4 - 2} = 3 \Rightarrow 2^a (2^a - 1) = 3 \times 2 \Rightarrow a = \log_2 3$

6. 小明從1到500的正整數中挑選4個相異的數字，使這4個數由小到大排列後形成一個等比數列。已知此等比數列的第一項（首項）為32，則下列哪一個數不可能出現在小明挑選的4個數之中？

(1)48 (2)108 (3)162 (4)200 (5)256。

答：(3)

解： $32 < 32 \times r^3 \leq 500 \Rightarrow 1 < r^3 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^3$

又 $32, 32r, 32r^2, 32r^3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow r = \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$

當 $r = \frac{3}{2}$ ，四數為32，48，72，108

當 $r = 2$ ，四數為32，64，128，256

當 $r = \frac{5}{2}$ ，四數為32，80，200，500

7. 空間中兩點 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(2, 4, 1)$ ，令線段 $\overline{AB}$ 在 xy 平面、平面 $E: 2x + y + 2z = 10$ 的投影長度分別為 a 、 b ，請選出正確的選項：

(1) $(1, 1, 0)$ 為 xy 平面的法向量 (2) $a = 2$ (3)直線 AB 與平面 E 平行 (4) $a > b$
(5)直線 AB 與 z 軸相交。

答：(5)

解：(1) xy 平面，即 $z = 0$ ，法向量 $(0, 0, 1)$

(2) $a = d((1, 2, 0), (2, 4, 0)) = \sqrt{5}$

(3) A 、 B 均在平面 E 上

(4) $b = |\overrightarrow{AB}| = |(1, 2, -2)| = 3$

$$(5) \overleftrightarrow{AB} \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3-2t \end{cases} \text{ 與 } z \text{ 軸交於 } (0,0,5), \text{ 即 } t=-1$$

二、多選題 (占 30 分)

$$8. \text{ 設 } c、d \text{ 為實數，下列有關線性方程組 } \begin{cases} x+y+cz=0 \\ x+cy+z=1 \\ y+z=d \end{cases} \text{ 的敘述哪些是正確的？}$$

- (1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解
 (2)若此線性方程組有解，則 $c \neq 1$
 (3)若此線性方程組有解，則 $d = 0$
 (4)若此線性方程組無解，則 $c = 1$
 (5)若此線性方程組無解，則 $d \neq 0$ 。

答：(1)(2)(4)

$$\text{解： } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c - 2$$

當 $c = 1$ ，原式無解（此時 $d = 0$ ， $d \neq 0$ 均成立）

當 $c \neq 1$ ，原式恰一組解（此時， $d = 0$ ， $d \neq 0$ 均成立）

9. 設 n 為正整數，蕾貝卡每天從漢堡、三明治、小籠湯包、饅頭夾蛋這 4 種選擇 1 種當早餐，每天的早餐必須和前一天不同，令連續 n 天所有選擇早餐的情況中，第 n 天與第 1 天選擇早餐相同的情況數為 a_n ，第 n 天與第 1 天選擇早餐不同的情況數為 b_n 。因此， $a_1 = 4$ ，

$$b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 12, \text{ 已知 } \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}, \text{ 對所有的正整數 } n \text{ 恆成立，}$$

請選出正確的選項：

$$(1) \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3) a_4 = 24 \quad (4) b_4 = 72$$

$$(5) \text{ 對於所有的正整數 } n, \text{ 恆有 } b_n + b_{n+1} \geq 4^n。$$

答：(1)(3)

解： $\because a_3 + b_3 = 4 \times 3 \times 3 = 36$ 且 $a_3 = 4 \times (3 \times 1) = 12$ ，故 $b_3 = 24$

$$\therefore \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 84 \end{bmatrix} \Rightarrow a_4 = 24, b_4 = 84$$

$$\text{由 } \begin{cases} b_n = a_{n+1} \\ 3a_n + 2b_n = b_{n+1} \\ a_{n+1} + b_{n+1} = 4 \times 3^n \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow b_{n-1} + b_n = 4 \times 3^{n-1} \quad (\text{即 } b_{n+1} + b_n = 4 \times 3^n)$$

$$\text{但 } 4 \times 3^n \geq 4^n \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^n \leq 4 \Rightarrow n(\log 4 - \log 3) \leq \log 4$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{0.6020}{0.1249} \doteq 4.8 \dots \dots, \text{ 表 } n \geq 5 \text{ 後不成立}$$

10. 坐標平面上，一圓 Γ 與兩直線 L_1 、 L_2 分別相切於 $P(1, -1)$ 、 $Q(3, 5)$ 兩點，
已知直線 L_1 的斜率為 -1 ，請選出正確的選項：

- (1) 圓 Γ 的圓心在直線 $x - y = 2$ 上 (2) 圓 Γ 的圓心坐標為 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(3) 圓 Γ 的半徑大於 4 (4) 直線 L_2 的斜率為 0
(5) 直線 L_1 與 L_2 的交點坐標為 $(-4, 4)$ 。

答：(1)(5)

解：(1) $\overline{PQ}$ 的中垂線 $x + 3y = 8$ 必過圓心
又過 P 之法線 $x - y = 2$ 也過圓心

(2) 故圓心 $O\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(3) 半徑 $= \overline{OP} = \overline{OQ} = \frac{5\sqrt{2}}{2} < 4$

(5) 過 P 之切線 $x + y = 0$ 與 $x + 3y = 8$ 交於 $R(-4, 4)$

(4) 則 $L_2 = \overrightarrow{QR} = x - 7y = -32$

11. 坐標空間中，已知向量 $\vec{u} = (a, b, c)$ ， $\vec{v} = (2, 1, 2)$ ，其中 $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ ，且 $a \neq 2b$ 。
請選出正確的選項：

- (1) 向量 $\vec{u}$ 可能平行向量 $\vec{v}$ (2) $2a + b + 2c$ 的最大可能值為 12
(3) 可找到向量 $\vec{u}$ 使得 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ (4) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ 之值可能為 0
(5) 若向量 $\vec{u}$ 滿足 $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2|\vec{v}|$ ，則 $|\vec{u} \times \vec{v}| = 6\sqrt{3}$ 。

答：(5)

解：(1) $\because a \neq 2b \quad \therefore \vec{u}$ 必不平行 $\vec{v}$

(2) $\because \left[a^2 + b^2 + c^2 \right] \left[2^2 + 1^2 + 2^2 \right] \geq [2a + b + 2c]^2$
 $\therefore -12 \leq 2a + b + 2c \leq 12$ ，但等號不成立 ($\because a \neq 2b$)

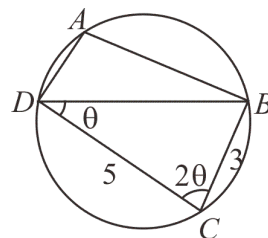
(3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{15}{4 \times 3} > 1$ 不成立

(4) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$ ，矛盾

(5) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2|\vec{v}| \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{|\vec{u}|} = \frac{1}{2}$ ，故 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = 4 \times 3 \times \sin \theta = 6\sqrt{3}$

12. 如圖（此為示意圖），圖中 $ABCD$ 為圓內接四邊形，
已知 $\triangle ABD$ 的面積為 4， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{CD} = 5$ ，
 $\angle BCD = 2\angle BDC$ ，請選出正確的選項：



- (1) $\angle BDC > 45^\circ$ (2) $\cos \angle BCD = \frac{2}{3}$ (3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$
(4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} > 0$ (5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -2\sqrt{2}$ 。

答：(3)(4)(5)

解：(1) $\triangle BCD$ 中，正弦定律： $\frac{3}{\sin \theta} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 3\theta)} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$

$$(2) \cos \angle BCD = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$(3) \triangle BCD \text{ 中，正弦定律：} \frac{3}{\sin \theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta} \Rightarrow \overline{BD} = 6\cos \theta = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

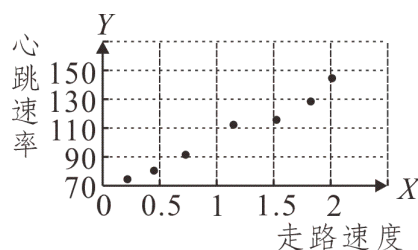
$$(4) \cos \angle BAD = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \angle BAD \text{ 為鈍角，故 } \angle ABD \text{ 為銳角，}$$

$$\text{則 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} > 0, \text{ 且 } \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$(5) \triangle ABD \text{ 的面積為 } 4 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin \angle BAD \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AD} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{則 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos \angle BAD = -2\sqrt{2}$$

13. 某人想要測量自己走路速度與心跳速率的關係，
他記錄了 7 筆在不同走路速度下的心跳速率資料，
將走路速度以 X 表示，其單位為公尺／秒（簡寫
為 m/s ）；心跳速率以 Y 表示，其單位為每分鐘的
次數（簡寫為 bpm ），將 X 、 Y 畫成散佈圖如右。
已知 Y 對 X 的迴歸直線方程式為 $y = 37.3x + 63.6$ ，
其中 X 的算術平均數為 1.12，標準差為 0.63，
請選出正確的選項：



- (1) X 與 Y 的相關係數為負數
(2) Y 的算術平均數小於 103
(3) Y 的標準差大於 20
(4) 在國外常用英里／小時（簡寫為 mph ）作為速度單位，已知 $1m/s \approx 2.24mph$ ，
若以 X' 表示將 X 的單位換算成 mph 後的走路速度，則 X' 的標準差會大於 0.63
(5) 承(4)， Y 對 X' 的迴歸直線斜率大於 37.3。

答：(3)(4)

解：(1) 與 Y 的相關係數應為正數

$$(2) \bar{Y} = 37.3\bar{X} + 63.6 = 37.3 \times 1.12 + 63.6 = 105.376 > 103$$

$$(3) m = r \times \frac{S_y}{S_x} \Rightarrow S_y = \frac{37.3 \times 0.63}{r} = \frac{23.499}{r} \xrightarrow{0 < r < 1} S_y > 23.499$$

$$(4) X' \text{ 的標準差} = 2.24 \times 0.63 = 1.4112$$

$$(5) Y \text{ 對 } X' \text{ 的迴歸直線斜率} = r' \times \frac{S'_y}{S'_x} = r \times \frac{S_y}{2.24 S_x} = \frac{m}{2.24} = \frac{37.3}{2.24} = 16.6\cdots < 37.3$$

第貳部分：選填題（占 35 分）

A. 已知實係數二次方程式 $x^2 + cx + 8 = 0$ 有一根為 $a + bi$ ，其中 a 、 b 均為正數， $i = \sqrt{-1}$ ，則 ab 的最大可能值為_____。

答：4

解： $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 8$ ， $a, b \in R$

$$\text{算幾不等式：} \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \Rightarrow ab \leq 4$$

B. 設 x 為實數且滿足 $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 4$ ，則 $|x-4| + |x-5|$ 的最小值為_____。
（化為最簡分數）

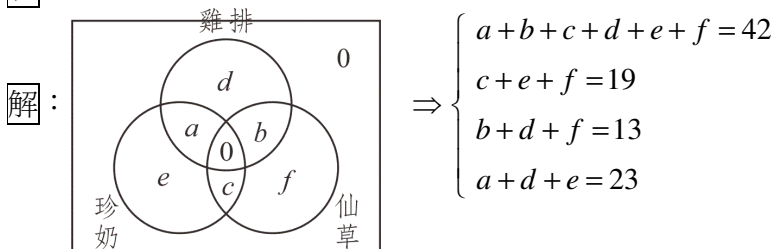
答： $\frac{7}{3}$

解： $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 4 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$

$$\text{則 } |x-4| + |x-5| = \frac{7}{3} \text{ 或 } \frac{23}{3}$$

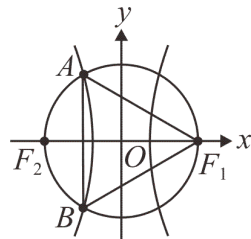
C. 某班級共 42 位同學，因慶祝排球比賽冠軍要訂購外食，他們選定了雞排，珍奶和嫩仙草等 3 項外食。統計結果如下：有 19 人沒訂雞排，有 13 人沒訂珍奶，有 23 人沒訂嫩仙草，且每個人至少都有訂一項，但沒有人三項都訂，則有_____位同學恰訂了兩項外食。

答：29



$$\text{則 } a+b+c = 2 \times 42 - (19+13+23) = 84 - 55 = 29$$

D. 雙曲線 Γ 的圖形如圖（此為示意圖），其中 F_1 、 F_2 為焦點， O 為原點。 A 、 B 是以 O 為圓心， $\overline{OF_1}$ 為半徑的圓與 Γ 的交點。已知 $\triangle ABF_1$ 為正三角形，且 $\overline{OF_1} = 1$ ，則 Γ 的實軸長為_____。
（化為最簡根式）



答： $\sqrt{3} - 1$

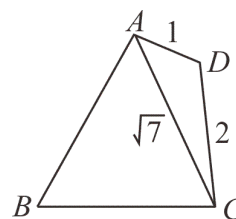
解： $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OF_1} = 1$ ， $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $F_1(1, 0)$ ， $F_2(-1, 0)$

$$2a = \overline{AF_1} - \overline{AF_2} = \sqrt{3} - 1$$

E. 如圖（此為示意圖）， $ABCD$ 為平面上的四邊形，

已知 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{AC} = \sqrt{7}$ ，且 $\cos \angle BAD = \frac{-\sqrt{7}}{14}$ ，

$\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ，則 $\overline{BC} =$ _____。（化為最簡分數）



答： $\frac{5}{2}$

解： $\cos \angle CAD = \frac{1+7-4}{2 \times 1 \times \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$$\cos \angle BAC = \cos(\angle BAD - \angle CAD) = \frac{-\sqrt{7}}{14} \times \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{3\sqrt{21}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{2}$$

F. 坐標平面上，已知直線 AB 的斜率為 1，且通過點 $(7, 2)$ ，若直線 BC 的法向量為 $\vec{n} = (1, 1)$ ，且通過點 $(4, 1)$ ，直線 AC 的參數式為 $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t + 1 \end{cases}$ ， $t \in R$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

答： 2

解： $\begin{cases} \vec{AB} : x - y = 5 \\ \vec{BC} : x + y = 5 \\ \vec{CA} : x - 3y = 9 \end{cases} \begin{cases} A(3, -2) \\ B(5, 0) \\ C(6, -1) \end{cases}$ ，故 $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \left\| \frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$

G. 坐標空間中，直線 AB 表 y 軸，直線 AC 的方程式為 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ ，直線 BC 的方程式為

$\frac{x}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-a}{b}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

答： $(0, 4)$

解： $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$ 交於 $A(0, 0, 0)$ ，令 $B(0, t, 0)$ ， $C(s, 2s, 2s)$ ， $ts \neq 0$

$$\vec{BC} = (s, 2s - t, 2s) \parallel (2, 1, b) \Rightarrow b = 4$$

$$B(0, t, 0) \in \frac{x}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-a}{4} \Rightarrow t = 6, a = 0$$