數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(3)	(4)	(4)	(4)	(1)	(2)(3)(4)	(1)(4)(5)	(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)(5)	(2)(3)	(1)(2)(3)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：科學記號與對數的運算

解析：$a=\log 20190823$

$=\log 2.0190823\times10^7$

$=\log 2.0190823+\log 10^7$

$=\log 2.0190823+7$

$\log 2<\log 2.0190823<\log 3 \Rightarrow 0.3010<\log 2.0190823<0.4771$

$\Rightarrow 7.3010<a<7.4771$

故選(3)。

2. (3)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的規律

解析：設倒入 x 單位的菌藻

每 2 天菌藻數為 $(x-20)\times2$

若要維持平衡則 $(x-20)\times2=x$

$\Rightarrow x=40$ (單位)

故選(3)。

3. (4)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：級數和的公式

解析：b 為 x 項係數

$b=2\cdot1+2\cdot3+2\cdot5+\cdots\cdots+2(2n-1)$，$n\in N$

$b=2\times\frac{[1+(2n-1)]\times n}{2}=2n^2$

故選(4)。

4. (4)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：能分辨條件機率和貝氏定理的關係

解析：P(高一學生｜數學成績及格)

$=\frac{P(\text{數學成績及格}\cap\text{高一學生})}{P(\text{數學成績及格})}$

$=\frac{10\%}{10\%+15\%+15\%}=\frac{1}{4}$

故選(4)。

5. (4)

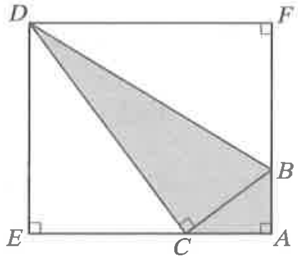
難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

解析：$\because \overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$ 且 $\angle A=90^\circ$，由畢氏定理知 $\overline{BC}=5$

過 D 點對 $\overrightarrow{AC}$ 的延長線作垂線，垂足為 E；過 D 點對 $\overrightarrow{AB}$ 的延長線作垂線，垂足為 F



$\therefore$由線性組合的意義知，$x=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$，$y=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

$\because \angle ABC+\angle ACB=90^\circ=\angle ACB+\angle DCE$，又$\angle A=\angle DEC=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECD$($AA$ 相似)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}\Rightarrow\frac{3}{\overline{EC}}=\frac{4}{\overline{DE}}=\frac{5}{12}\Rightarrow\overline{EC}=\frac{36}{5}\text{，}\overline{DE}=\frac{48}{5}$$

可得 $x=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{48}{5}}{3}=\dfrac{16}{5}$

$$y=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}+\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{4+\frac{36}{5}}{4}=\frac{14}{5}$$

數對 $(x, y)=\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{14}{5}\right)$

故選(4)。

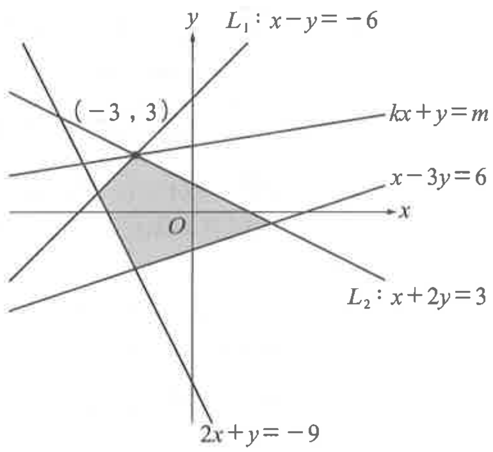
6. (1)

難易度：難

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能使用幾何意義求取最大值

解析：設 $kx+y=m$，表斜率為 $-k$ 的直線，由於 y 係數為正且直線在 $(-3, 3)$ 有唯一最大值，故直線斜率 $-k$ 在 L_1 與 L_2 的斜率之間



$$-\frac{1}{2}<-k<1$$

$$\therefore -1<k<\frac{1}{2}$$

故選(1)。

二、多選題

7. (2)(3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：虛根成對，勘根定理

解析：(1)╳：由虛根成對定理可得另一根為 $2-i$

(2)○：$f(0)<0$，$f(6)>0$，又已經有兩複數根　$\therefore$區間 $(0, 6)$ 內恰有 1 個正實根

(3)○：$ax^3+bx^2+cx+d=2019x+108$ 為實係數三次方程式，必有實數根　$\therefore$兩圖形必有交點

(4)○：$f(x^2)=(x-1)(x-2)$ 為實係數六次方程式，恰有 6 個根

(5)╳：令正實根為 r，則$f(x)=\dfrac{1}{2}[x-(2+i)][x-(2-i)](x-r)$

$$=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)(x-r)$$

$\because f(6)=\dfrac{1}{2}[36-24+5](6-r)=17$　$\therefore r=4$

利用 $f(0)=d$ 或展開 $f(x)$ 或利用三根積都可得到 $d=-10$

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(4)(5)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線的斜率與截距

解析：由三直線 L_1、L_2、L_3 之方程式知 L_1 的斜率 $-\dfrac{1}{a}$，L_2 的斜率 $-\dfrac{1}{c}$，L_3 的斜率 $-e$

(1)○：令 $x=0$，由 L_1 與 y 軸的交點知 $y=-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow ab>0$

(2)╳：令 $x=0$，由 L_2 與 y 軸的交點知 $y=-\dfrac{d}{c}>0\Rightarrow cd<0$

(3)╳：由 L_1、L_2 的傾斜程度知 $-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{c}>0\Rightarrow a>c$

(4)○：由 L_1、L_3 的方程式知，L_1 與 y 軸的交點為 $\left(0,-\dfrac{b}{a}\right)$，$L_3$ 與 y 軸的交點為 $(0,-f)$

因此 $-\dfrac{b}{a}=-f\Rightarrow b=af$

(5)○：由於 L_1 與 L_3 垂直，L_1 與 L_3 的斜率相乘等於 $-1\Rightarrow -\dfrac{1}{a}\cdot(-e)=-1\Rightarrow a+e=0$

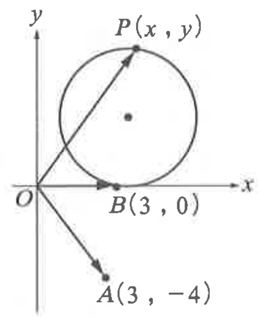
故選(1)(4)(5)。

9. (3)(4)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的內積



解析：(1)╳：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(4,6)\cdot(3,-4)=-12$

(2)╳：$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OA}|}=\frac{-12}{2\sqrt{13}\cdot 5}=\frac{-6}{5\sqrt{13}}$$

(3)○：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(x,y)\cdot(3,-4)=3x-4y$

由柯西不等式知 $[(x-4)^2+(y-3)^2](3^2+(-4)^2)\geq[3(x-4)-4(y-3)]^2$

$\Rightarrow 9\cdot 25\geq(3x-4y)^2$

$\Rightarrow 15\geq 3x-4y\geq -15$

(4)○：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(x,y)\cdot(3,0)=5\Rightarrow 3x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$

代入圓 C：$(x-4)^2+(y-3)^2=9$，得 $y=3\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

故 P 有兩解 $\left(\dfrac{5}{3},\ 3\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

(5)╳：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(x,y)\cdot(3,0)=3x$，因此最大值發生在圓 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 上 x 坐標最大的點由方程式知即為 $(7,3)$，故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最大值為 $3\cdot 7=21$

故選(3)(4)。

10. (3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：能利用長度和法向量標定點的關係及坐標

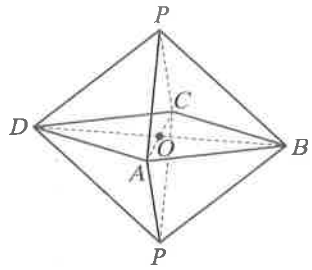
解析：設 P 為頂點

$\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(0+4)^2+(3-2)^2}=3\sqrt{2}=\overline{AP}$

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$

作圖如右



A，B，C 的位置如右圖

O 為 A，C 中點，亦為 B，D 中點

得 $O(2,-2,1)$，$D(1,-4,-1)$

又 $\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3=|\overrightarrow{OP}|$

$\overrightarrow{OP}\ /\!/\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -4 & 4\end{vmatrix}\right)=-6(2,1,-2)$

取 $\overrightarrow{OP}=\pm(2,1,-2)$

得 P 點坐標為 $(0,-3,3)$ 或 $(4,-1,-1)$

故選(3)(4)(5)。

11. (2)(3)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：能判讀基本方程式的圖形和 a，b，c 的關係

解析：∵有相同的焦點　∴方向要相同，中心要相同，c 值要一樣

$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 為左右型的橢圓，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$

(1)╳：沒有圖形

(2)○：$\dfrac{x^2}{5-\sqrt{17}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{17}-3}=1$ 為左右型的雙曲線，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{(5-\sqrt{17})+(\sqrt{17}-3)}=\sqrt{2}$

(3)○：左右型的橢圓，中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{(5+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})}=\sqrt{2}$

(4)╳：$\dfrac{y^2}{5-\sqrt{15}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{15}-3}=1$ 為上下型的雙曲線

(5)╳：$\dfrac{y^2}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{x^2}{3+\sqrt{5}}=1$ 為上下型的橢圓

故選(2)(3)。

12. (1)(2)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：能由方程式判斷平面和直線間的關係

解析：(1)○：∵L 的方向向量 $/\!/\ (1,2,-1)\times(1,1,1)=(3,-2,-1)$

取 L 的方向向量為 $(3,-2,-1)$，又平面法向量為 $(4,5,2)$

方向向量和法向量垂直，故直線和平面平行或直線包含於平面

自找任一點 $A(1,0,-2)\in L$，$A(1,0,-2)$ 代入 $4x+5y+2z=0$ (合)

A 亦在平面上故 L 包含於平面

(2)○：L_1：$\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{1}$

∵L_1 的方向向量$(-2,2,-1)\not/\!/\ L_2$ 的方向向量 $(-3,4,1)$

∴$L_1\not/\!/\ L_2$

L_1 和 L_2 皆通過點 $(3,-3,2)$

故 L_1 和 L_2 交於一點 $(3,-3,2)$

(3) ○：L_1：$\dfrac{x-1}{\frac{1}{3}}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{3}}=\dfrac{z-6}{\frac{1}{2}}$

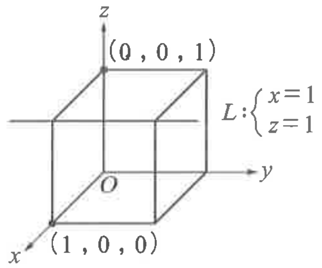
L_1 的方向向量$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ // L_2 的方向向量 $(2,2,3)$

即 $L_1 \parallel L_2$

L_1 通過點 $(1,2,6)$ 但點 $(1,2,6)$ 不在 L_2 上

$\therefore L_1$ 和 L_2 平行不重合

(4) ○：直接作圖



(5) ○：L_1 的方向向量 $(-1,2,1)$ // L_2 的方向向量 $(-2,4,2)$

$\therefore L_1 \parallel L_2$

又 L_1 過點 $(2,0,1)$

代入 L_2 得 $s=\dfrac{1}{2}$ 表 $(2,0,1)$ 亦在 L_2 上

故 L_1 和 L_2 重合

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 24

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：利用綜合除法求餘數

解析：

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & + & 6 & + & 0 & + & 52 & + & a & + & 20 & & -7 \\
 & - & 7 & + & 7 & - & 49 & - & 21 & + & (-7a+147) & & \\
\hline
1 & - & 1 & + & 7 & + & 3 & + & (a-21) & + & (167-7a) & &
\end{array}$$

$\therefore 167-7a=-1 \Rightarrow 7a=168 \Rightarrow a=24$。

B. 15

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數的圖形

解析：作圖如右

可得 $P(16,4)$，$Q(-2,4)$，$R\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$，

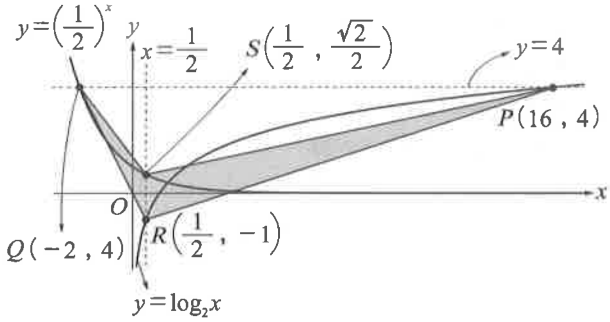
$S\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

四邊形 $PRQS$ 面積

$=\triangle PRQ-\triangle PSQ$

$=\dfrac{1}{2}\times18\times5-\dfrac{1}{2}\times18\times\left(4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=9\times\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\approx 9\times1.707=15.363 \approx 15$ 平方單位。



C. 84

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：標準化數據

解析：由題意知小強的標準化整數分數輸小美 1 分

$\therefore$小強標準化整數分數為 $3-1=2$，得未四捨五入前的標準化分數 $y \Rightarrow 1.5 \le y < 2.5$

令小強段考成績為 x 分，$y=\dfrac{x-72}{8}$

則 $1.5 \le \dfrac{x-72}{8} < 2.5 \Rightarrow 84 \le x < 92$

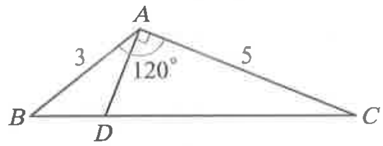
故小強該次段考數學成績最低為 84 分。

D. $\dfrac{70}{13}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角形的面積公式、餘弦定理



解析：由餘弦定理 $\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\dfrac{1}{2}$，

故得 $\angle BAC=120^\circ$，又 $\angle CAD=3\angle BAD$

$\therefore \angle CAD=90^\circ$ 且 $\angle BAD=30^\circ$，作圖如右

又$\triangle ABC$ 的面積$=\triangle ABD$ 的面積$+\triangle ACD$ 的面積

利用面積公式得 $\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\overline{AD}\cdot\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot5\cdot\sin90^\circ \Rightarrow \overline{AD}=\dfrac{15\sqrt{3}}{13}$

由畢氏定理知 $\overline{CD}=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{15\sqrt{3}}{13}\right)^2}=\dfrac{70}{13}$。

E. 60

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的直線與平面〉

目標：三元一次聯立方程式

解析：由資訊(1)列式得 $\dfrac{Y}{X+Y}=0.9375$，由資訊(2)列式得 $\dfrac{Y}{Y+Z}=0.625$，再加上 $X+Y+Z=1$ 解聯立

$$\Rightarrow \begin{cases} Y=0.9375(X+Y) \\ Y=0.625(Y+Z) \\ X+Y+Z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=0.04=4\,\% \\ Y=0.6=60\,\% \\ Z=0.36=36\,\% \end{cases}$$

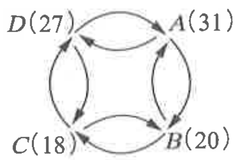
故使用傳統市話也有使用手機的人口比例 $Y=60\,\%$。

F. 13

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第一冊第一章〈數與式〉

目標：用樹狀圖計數或求絕對值的極值



解析：平均每處有 $\dfrac{31+27+18+20}{4}=24$ 個

$\because$要求搬動次數最少　$\therefore$應該從多餘處先搬運

$$(1)\ \begin{tikzcd}[row sep=small] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \\ D \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & C & & \end{tikzcd}$$

各法分別搬動 19，17，15，13 次

$$\text{例如：}\begin{tikzcd}[row sep=small] & A \arrow[r, "10"] & B \arrow[r, "6"] & C \\ D \arrow[ur, "3"] \arrow[dr, "0"'] & & & \\ & C & & \end{tikzcd}$$

上圖共搬 $3+10+6=19$ 次

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r] & C \\ (2)\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & D \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$
各法皆搬動 13 次

故至少搬動 13 次

〈另解〉

設先從 A 搬 x 塊到 B 共搬 $|x|$ 次 (x 若為負，則表方向相反)

再從 B 搬 $(20+x)-24$ 塊到 C 共搬 $|(20+x)-24|=|x-4|$ 次

再從 C 搬 $18+(x-4)-24$ 塊到 D 共搬 $|x-10|$ 次

再從 D 搬 $27+(x-10)-24$ 塊到 A 共搬 $|x-7|$ 次

搬動次數 $=|x|+|x-4|+|x-7|+|x-10|$

當 $4\le x\le 7$ 時最小值為 $4+0+3+6=13$

故至少搬動 13 次。

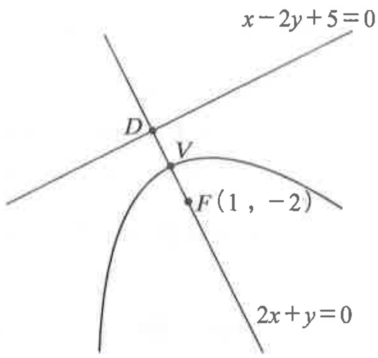
G. $(0\,,0)$

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：能知拋物線的定義

解析：作圖如右



由定義知準線：$x-2y+5=0$

$\because$ 對稱軸垂直準線，且過焦點 $F(1\,,-2)$

$\therefore$ 對稱軸為 $2x+y=0$

對稱軸和準線交於 D

由 $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ 得 $D(-1\,,2)$

頂點 V 為 $F(1\,,-2)$ 和 $D(-1\,,2)$ 的中點

得 $V(0\,,0)$。

H. $\dfrac{4}{7}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能用轉移矩陣求重複試驗的穩定狀態

解析：設穩定狀態抽中紅球機率為 x，則抽中白球機率為 $1-x$

又紅球白球的轉移矩陣為 $\begin{array}{c} \text{紅球}\ \text{白球} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{紅球} \\ \text{白球} \end{array}$

$\because$ 達成穩定狀態，可得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(1-x)=x \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}(1-x)=1-x \end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{7}$$

故穩定狀態時取出紅球機率為 $\dfrac{4}{7}$。