109 年學科能力測驗第六次模擬考試

數學考科解析

109-W6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(1)	(3)	(4)	(3)	(5)	(4)	(2)	(1)(3)	(4)(5)	(3)(5)	(1)(2)(3)(5)	(1)(2)(3)	(2)(4)	4	5
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	1	8	1	5	1	2	6	2	5	2	5	1	9	1
31														
3														

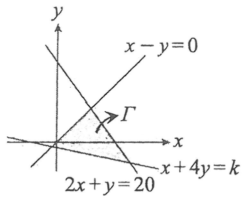
第壹部分

一、單選題

1. (1) 【難易度】★☆☆

【出處】第三冊 第二章 直線與圓

【解析】封閉區域Γ的圖形如下所示：



由平行線法可知將直線$x+4y=k$往左下方移動時，k值會變小，且Γ面積會變大

故選(1)

2. (3) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】由$12<a<13$，$16<b<17$

可得$144<a^2<169$，$256<b^2<289$

$\Rightarrow 400<a^2+b^2<458 \Rightarrow 400<c^2<458 \Rightarrow 20<c<\sqrt{458}$

因為$21<\sqrt{458}<22$，所以$n=20$，21

故選(3)

3. (4) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數；第二冊 第一章 數列與級數

【解析】設第n天後感染此新型病毒的人數為a_n

可知〈a_n〉為等比數列，其首項為$a_1=1$，公比為$r=5$

所以$a_n=5^{n-1}>10^6 \Rightarrow \log 5^{n-1}>\log 10^6 \Rightarrow (n-1)\log 5>6$

$\Rightarrow n>\dfrac{6}{\log 5}+1 \approx \dfrac{6}{0.699}+1 \approx 9.58$

故選(4)

4. (3) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】設事件A表前二次點數乘積等於第三次點數，事件B表三次點數均相異

可知$A=\{(1，1，1)，(1，2，2)，(2，1，2)，(1，3，3)，(3，1，3)，(1，4，4)，(4，1，4)，(2，2，4)，(1，5，5)，(5，1，5)，(1，6，6)，(6，1，6)，(2，3，6)，(3，2，6)\}$

$A\cap B=\{(2，3，6)，(3，2，6)\}$

又$n(A)=14$，$n(A\cap B)=2$

所以$P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$

故選(3)

5. (5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 第二章 空間中的平面與直線

【解析】因為$E_1 /\!/ E_2$，所以$L /\!/ E_2$，設$\vec{n}=(2，-1，1)$為平面E_2的一組法向量，$\vec{\ell}$為直線L的一組方向向量

(1)× $\vec{\ell}=(2，-1，1)$

$\Rightarrow \vec{\ell} /\!/ \vec{n}$，所以$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$與$E_2$交於一點（不合）

(2)× $\vec{\ell}=(3，4，-2)$

$\Rightarrow \vec{\ell}\cdot\vec{n}=(3，4，-2)\cdot(2，-1，1)=6-4-2=0$

將$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$上一點$A(0，-1，3)$代入$E_2$可得

$2\times 0-(-1)+3=4$，所以A點位於E_2上

即$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$位於$E_2$上（不合）

(3)× $\vec{\ell}=(1，1，1)$

$\Rightarrow \vec{\ell}\cdot\vec{n}=(1，1，1)\cdot(2，-1，1)=2-1+1\neq 0$

所以$\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$，$t\in R$與$E_2$交於一點（不合）

(4)× $\vec{\ell}=(-4，-3，5)$

$\Rightarrow \vec{\ell}\cdot\vec{n}=(-4，-3，5)\cdot(2，-1，1)=-8+3+5=0$

將$\begin{cases}x=2-4t\\ y=1-3t\\ z=1+5t\end{cases}$，$t\in R$上一點$A(2，1，1)$代入$E_2$可得

$2\times 2-1+1=4$

所以A點位於E_2上，即$\begin{cases}x=2-4t\\ y=1-3t\\ z=1+5t\end{cases}$，$t\in R$位於$E_2$上（不合）

(5)○ $\begin{cases}x-y=-2\\ y+z=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2+t\\ y=t\\ z=3-t\end{cases}$，$t\in R \Rightarrow \vec{\ell}=(1，1，-1)$

$\Rightarrow \vec{\ell}\cdot\vec{n}=(1，1，-1)\cdot(2，-1，1)=2-1-1=0$

將$\begin{cases}x-y=-2\\ y+z=3\end{cases}$上一點$A(-2，0，3)$代入$E_2$可得

$2\times(-2)-0+3\neq 4$

所以A點不位於E_2上，即$\begin{cases}x-y=-2\\ y+z=3\end{cases}$與$E_2$平行

故選(5)

6. (4) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】可知$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{i-1}=1\times\dfrac{2^i-1}{2-1}=2^i-1\geq 2021$

$\Rightarrow 2^i\geq 2022 \Rightarrow i\geq 11$

所以$i=11$

又$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^9=1\times\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$

$\Rightarrow 2021-1023=998$

因此可得$j=998$

$\Rightarrow i+j=11+998=1009$

故選(4)

7. (2) 【難易度】★★★

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】可知200元可選擇付0張，1張，2張，3張，4張，5張

而500元可選擇付0張，1張，2張，3張，4張

由乘法原理可得$(5+1)\times(4+1)-\underset{付0元}{\underline{1}}=29$

即共有29種付款方式

因為1000元款額（5張200元或2張500元）、1500元款額（5張200元與1張500元或3張500元）、2000元款額（5張200元與2張500元或4張500元）皆各有2種付款方式

所以共可支付$29-3=26$種不同的款額

故選(2)

$\boxed{另解}$：100，200，300，400，……，3000的30種情況中，無法付100及2900與300及2700兩組共4種情況，故有$30-4=26$種

二、多選題

8. (1)(3) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】(1)○ $x=0$ 代入可得 $f(0)=1$，所以 $y=f(x)$ 的圖形和 y 軸交於一點 $(0,1)$，即交點的 y 坐標大於 0

(2)✕ 因為 $f(x)=0$ 為三次實係數多項式方程式，所以由虛根成對定理可知 $f(x)=0$ 至少有一實根，即 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸必相交

(3)○ 若 $x+1$ 為 $f(x)$ 的因式

則由因式定理可知 $f(-1)=-2+k+1=0$

$\Rightarrow k=1\in Z$（合）

所以 $x+1$ 可能為 $f(x)$ 的因式

(4)✕ $f(2)=16-2k+1=0\Rightarrow k=\dfrac{17}{2}\notin Z$（不合）

所以 $x-2$ 不可能為 $f(x)$ 的因式

(5)✕ $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{k}{2}+1=0\Rightarrow k=\frac{5}{2}\notin Z$（不合）

所以 $2x-1$ 不可能為 $f(x)$ 的因式

故選(1)(3)

9. (4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】(1)✕ $\mu_x=\dfrac{33+34+36+38+37+38}{6}=36$

$\mu_y=\dfrac{22+36+40+54+44+50}{6}=41$

所以 $\mu_x<\mu_y$

(2)✕ 可知數據 y 較分散，所以 $\sigma_x<\sigma_y$

(3)✕ 因為當數據 x 變大時，數據 y 也有變大的趨勢，所以 $0<r<1$

(4)○ 承(3)可知 $r>0$，又 $a=\dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x}$，所以 $a>0$

(5)○ 因為 y 對 x 的迴歸直線必通過點 (μ_x,μ_y)

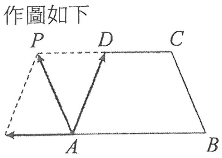
所以將點 $(36,41)$ 代入 $y=ax+b$ 可得 $36a+b=41$

故選(4)(5)

10. (3)(5) 【難易度】★★☆

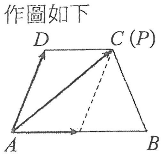
【出處】第三冊 第三章 平面向量

【解析】(1)✕ 作圖如下



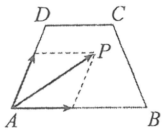
所以終點 P 落在等腰梯形 $ABCD$ 外部

(2)✕ 作圖如下



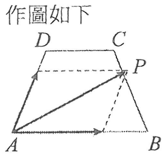
所以終點 P 與 C 點重合，即落在等腰梯形 $ABCD$ 邊界上

(3)○ 作圖如下



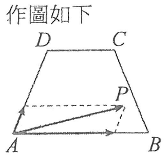
所以終點 P 落在等腰梯形 $ABCD$ 內部

(4)✕ 作圖如下



所以終點 P 落在等腰梯形 $ABCD$ 外部

(5)○ 作圖如下



所以終點 P 落在等腰梯形 $ABCD$ 內部

故選(3)(5)

$\boxed{\text{另解}}$：設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$

由平行四邊形合成法可知 x，y 必須滿足 $\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\2x+y<2\end{cases}$

故選(3)(5)

11. (1)(2)(3)(5) 【難易度】★★★

【出處】第四冊 第三章 矩陣

【解析】(1)○ 因為 P 為轉移矩陣，所以 $a+b=c+d=1$

(2)○ 承(1)可知 $b=1-a$，$d=1-c$

$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}a & c\\1-a & 1-c\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det P=a(1-c)-c(1-a)$

$=a-ac-c+ac$

$=a-c$

(3)○ 承(2)可知 $P^{-1}=\dfrac{1}{a-c}\begin{bmatrix}1-c & -c\\-1+a & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-c}{a-c} & \frac{-c}{a-c}\\\frac{-1+a}{a-c} & \frac{a}{a-c}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e & f\\\frac{15}{11} & \frac{-5}{11}\end{bmatrix}$

因為 $\begin{cases}\dfrac{1-c}{a-c}+\dfrac{-1+a}{a-c}=\dfrac{a-c}{a-c}=1\\\dfrac{-c}{a-c}+\dfrac{a}{a-c}=\dfrac{a-c}{a-c}=1\end{cases}$

所以 $\begin{cases}e=1-\dfrac{15}{11}=\dfrac{-4}{11}\\f=1-(\dfrac{-5}{11})=\dfrac{16}{11}\end{cases}$

$\Rightarrow e+f=\dfrac{-4}{11}+\dfrac{16}{11}=\dfrac{12}{11}$

(4)✕ 承(3)可得 $\begin{cases}\dfrac{-1+a}{a-c}=\dfrac{15}{11}\cdots\cdots①\\\dfrac{a}{a-c}=\dfrac{-5}{11}\cdots\cdots②\end{cases}$，$\dfrac{①}{②}=\dfrac{-1+a}{a}=-3$

$\Rightarrow 4a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$

代入②可得 $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-c}=\dfrac{-5}{11}\Rightarrow\dfrac{11}{4}=\dfrac{-5}{4}+5c\Rightarrow c=\dfrac{4}{5}$

$\boxed{\text{另解}}$：$\det P^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{-4}{11} & \frac{16}{11}\\\frac{15}{11} & \frac{-5}{11}\end{vmatrix}=\dfrac{20}{121}-\dfrac{240}{121}=\dfrac{-20}{11}$

$\Rightarrow P=\dfrac{11}{-20}\begin{bmatrix}\frac{-5}{11} & \frac{-16}{11}\\\frac{-15}{11} & \frac{-4}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{4}{5}\\\frac{3}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$

$a=\dfrac{1}{4}$，$c=\dfrac{4}{5}$

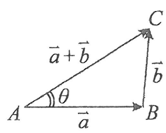
(5)○ 承(4)可知正確

故選(1)(2)(3)(5)

12. (1)(2)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第三冊 第一章 三角；第三章 平面向量

【解析】設 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\angle BAC=\theta$，作圖如右



可知 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overline{AB}=\sqrt{2}$，$\angle ACB=45°$

$\Rightarrow 0°<\theta<135°$

$\Rightarrow 0<\sin\theta\le 1$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理

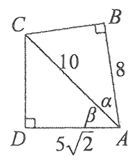
可得 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\dfrac{|\vec{b}|}{\sin\theta}\Rightarrow|\vec{b}|=2\sin\theta\Rightarrow 0<|\vec{b}|\le 2$

故選(1)(2)(3)

13. (2)(4) 【難易度】★★★

【出處】第三冊 第一章 三角；第三章 平面向量

【解析】設 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，作圖如右



可知 $\cos\alpha=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5\sqrt{2}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(1)✕ $\cos\angle BAD=\cos(\alpha+\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

(2)○ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\angle BAD=8\times5\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}=8$

(3)✕ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\beta=\overline{AD}^2=(5\sqrt{2})^2=50$

(4)○　因為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\alpha=\overline{AB}^2=64$

又 $\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$

所以可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a|\overrightarrow{AB}|^2+b\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+b|\overrightarrow{AD}|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}64a+8b=64\\8a+50b=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8a+b=8\\8a+50b=50\end{cases}$

$\Rightarrow 49b=42\Rightarrow b=\dfrac{6}{7}$

$\Rightarrow 8a=8-\dfrac{6}{7}=\dfrac{50}{7}\Rightarrow a=\dfrac{25}{28}$

(5)✕　$b=\dfrac{6}{7}$

故選(2)(4)

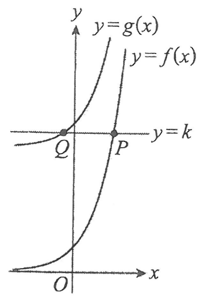
第貳部分：選填題

A. $\dfrac{45}{8}$

【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】設 $P(\alpha,3^\alpha)$，將 $f(x)=3^x$ 的圖形向上平移 5 單位可得 $g(x)=3^x+5$ 的圖形，作圖如右



因為 $\overline{PQ}=2$，所以 $Q(\alpha-2,3^{\alpha-2}+5)$

$\Rightarrow 3^\alpha=3^{\alpha-2}+5=k\Rightarrow 3^\alpha=\dfrac{1}{9}\cdot 3^\alpha+5$

$\Rightarrow \dfrac{8}{9}\cdot 3^\alpha=5\Rightarrow 3^\alpha=\dfrac{45}{8}$

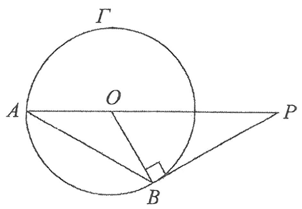
故 $k=\dfrac{45}{8}$

B. 18

【難易度】★☆☆

【出處】第三冊 第一章 三角；第二章 直線與圓

【解析】設圓 Γ 的圓心為 O，且半徑為 r，因為 $\overline{PB}$ 為圓 Γ 的切線，所以 $\overline{OB}\perp\overline{PB}$，作圖如下：



可知 $\angle OAB=\angle OBA=120°-90°=30°$

$\Rightarrow \angle BPA=180°-30°-120°=30°$

又 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$，所以 $\overline{PB}=\dfrac{\overline{OB}}{\tan 30°}=\sqrt{3}r=6\sqrt{3}\Rightarrow r=6$

因為 $\overline{OP}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin 30°}=2r$

故 $\overline{AP}=\overline{OA}+\overline{OP}=r+2r=3r=3\times 6=18$

C. 15

【難易度】★★☆

【出處】第三冊 第一章 三角

【解析】可知 $\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=a+2$，$\angle AOB=138°-108°=30°$

所以 $\triangle OAB$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB$

$=\dfrac{1}{2}\times a\times(a+2)\times\sin 30°=\dfrac{a(a+2)}{4}<12$

$\Rightarrow a^2+2a-48<0$

$\Rightarrow (a-6)(a+8)<0\Rightarrow -8<a<6$

又 a 為正整數，因此可得 $a=1,2,3,4,5$

故所有正整數 a 的總和為 $1+2+3+4+5=15$

D. $\sqrt[4]{12}$

【難易度】★★☆

【出處】第三冊 第一章 三角；第四冊 第四章 二次曲線

【解析】因為 $\overline{EF}=\overline{ED}=1$ 且 $\angle DEF=120°$

所以由餘弦定理可得 $\overline{DF}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos 120°}=\sqrt{3}$

又由橢圓定義可知 $2a=\overline{DF}+\overline{DC}=\sqrt{3}+1$，$2c=\overline{CF}=2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\\c=1\end{cases}$

$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2})^2-1^2}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}-1}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

故短軸長為 $2b=2\times\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{12}$

E. 625

【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數；第二冊 第四章 數據分析

【解析】依題意可知該款公仔的月銷售總金額為

$(500\times(1+\dfrac{a}{100}))\times(3000\times(1-\dfrac{2a}{300}))$

$=(5\times(a+100))\times(20\times(-a+150))$

$=-100(a^2-50a-15000)=-100((a-25)^2-15625)$

$=-100(a-25)^2+1562500$

所以當 $a=25$ 時，月銷售總金額有最大值

故此時該款公仔的價格為 $500\times(1+\dfrac{25}{100})=625$ 元

F. $2\sqrt{5}$

【難易度】★★☆

【出處】第四冊 第一章 空間向量

【解析】設 F 點到平面 BCD 的距離為 d，可知 $\overline{AC}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\sqrt{(10\sqrt{2})^2+5^2}=15$，$\overline{BD}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$

因為 $\overline{CD}^2=225$，$\overline{BD}^2+\overline{BC}^2=125+100=225$

所以 $\overline{CD}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2\Rightarrow\angle CBD=90°$

又三角錐 $BCDF$ 的體積 $=\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD$ 面積 $\times d$

$=\dfrac{1}{3}\times\triangle BCF$ 面積 $\times\overline{DE}$

因此可得 $\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times10\times5\sqrt{5})\times d=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times10\times5)\times10$

$\Rightarrow d=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，故 F 點到平面 BCD 的距離為 $2\sqrt{5}$

另解：設 $B(0,0,-5)$，$C(10,0,-5)$，$D(0,10,0)$，$F(10,0,0)$

可知 $\overrightarrow{BC}=(10,0,0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,10,5)$

$\Rightarrow\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(\begin{vmatrix}0&0\\10&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&10\\5&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}10&0\\0&10\end{vmatrix})$

$=(0,-50,100)//(0,1,-2)$

所以由點法式可得平面 BCD 的方程式為 $y-2(z+5)=0$

$\Rightarrow y-2z-10=0$

故 F 點到平面 BCD 的距離為 $d(F$，平面 $BCD)$

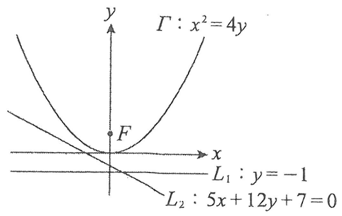
$=\dfrac{|0-2\times0-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

G. $\dfrac{19}{13}$

【難易度】★★★

【出處】第三冊 第三章 平面向量；第四冊 第四章 二次曲線

【解析】可知準線為 L_1，焦點為 $F(0,1)$，作圖如下：



由拋物線定義可得 $d(P,L_1)+d(P,L_2)$

$=\overline{PF}+d(P,L_2)\geq d(F,L_2)$

$=\dfrac{|5\times0+12\times1+7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{19}{13}$

故最小值為 $\dfrac{19}{13}$