

台北區 109 學年度第一學期第二次學科能力測驗

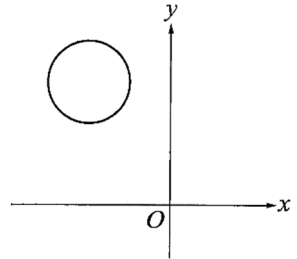
第壹部分：選擇題（占 60 分）



RA494

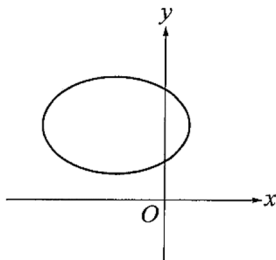
一、單選題（占 30 分）

- 滿足絕對值不等式 $|2x - \sqrt{3}| \leq 5$ 的所有實數 x 所形成的區間，其長度為何？
(1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) $2\sqrt{3}$ (4) 5 (5) 10
- 設 $g(x)$ 是三次實係數多項式函數， $h(x) = -2x^2 + x + 2$ 。已知 $g(1) = h(1)$ 、 $g(0) = h(0)$ 、 $g(-1) = h(-1)$ ，若實係數多項式 $f(x) = g(x) - h(x)$ ，則下列何者不是 $f(x)$ 的因式？
(1) x (2) $x-1$ (3) $x+1$ (4) $2x-2$ (5) $x+2$
- 下列各圖中， x 軸與 y 軸均具有相同的單位長。已知右圖中的圓是方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 的圖形，則下列選項中，

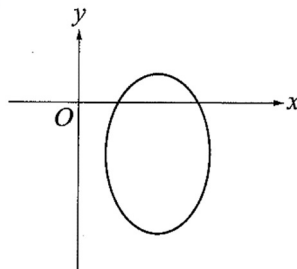


何者最可能是方程式 $\frac{(x-b)^2}{a^2} + \frac{(y-a)^2}{b^2} = 1$ 的圖形？

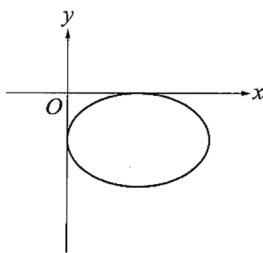
(1)



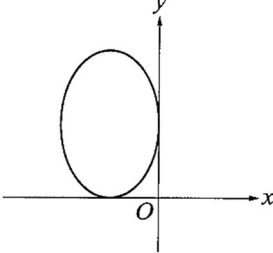
(2)



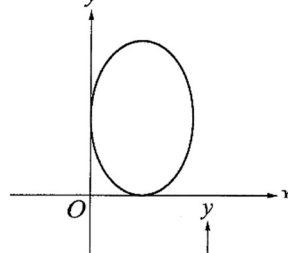
(3)



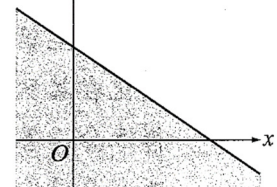
(4)



(5)



- 不等式 $ax + by \geq c$ 的部分圖形如右圖陰影區域所示，則序對 (a, b, c) 最有可能為下列哪個選項？



- (1) (2, 3, 4) (2) (2, 3, -4) (3) (-2, 3, 4)
(4) (-2, -3, 4) (5) (-2, -3, -4)

- 空間坐標系中有一點 $P(3, -2, -4)$ ，設 O 為原點，且 Q 點在 xy 平面上移動。下列五個選項都是 Q 點可能的所在位置，請問這些選項中，哪一個 Q 點可使 $\angle POQ$ 最小？

- (1) (3, -1, 0) (2) (6, -4, 0) (3) (-1, -5, 0) (4) (4, -3, 0) (5) (2, 4, 0)

- 設 θ 為銳角，且 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 三數成等比數列，則 $\cos \theta$ 落在下列哪個範圍？

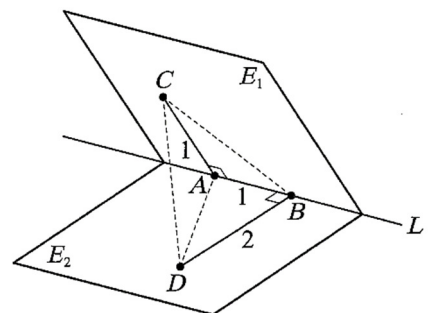
- (1) $\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{5} < \cos \theta < \frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3} < \cos \theta < \frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{4} < \cos \theta < \frac{4}{5}$ (5) $\frac{4}{5} < \cos \theta < 1$

二、多選題（占 30 分）

- 參考右圖，空間中兩平面 E_1 、 E_2 的交線為 L ，且兩平面的夾角為 60° 。點 A 、 B 在交線 L 上，點 C 、 D 分別在平面 E_1 、 E_2 上， $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ， $\overline{BD} = 2$ ，

則下列選項哪些正確？(1) 向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 的夾角為 60°

- (2) $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (3) $\overline{CD} = 2$ (4) $\cos \angle CAD = \frac{1}{2}$ (5) $\overline{BC} \perp \overline{BD}$



8. 因疫情在 2020 年爆紅的 Podcast，代表眼球經濟的板塊即將轉移到耳朵經濟。某廣告商人思考投注廣告的效益，花了一年時間針對 20 至 50 歲的閱聽人進行使用習慣調查後發現：使用 YouTube 的閱聽人中，每月有 30%轉換到 Podcast，其餘 70%不變；而使用 Podcast 的閱聽人中，每月有 20%的閱聽人轉換到 YouTube，其餘 80 %不變。我們用轉移矩陣來模擬轉換的狀態：已知 2020 年 12 月底時，20 至 50 歲的閱聽人中使用 YouTube 與 Podcast 所占的比例分別為 $x_0 = 0.9$ 與 $y_0 = 0.1$ 。我們設初始狀態矩陣為

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \text{ 第 } n \text{ 次狀態矩陣為 } P_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ 其中 } x_n \text{ 與 } y_n \text{ 分別為第 } n \text{ 次轉換後，YouTube}$$

使用者與 Podcast 使用者所占的比例，則下列選項哪些正確？

(1)此事件的轉移矩陣 $M = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$ (2)2021 年 1 月底時，Podcast 使用者所占的比例

為 35% (3)2021 年 2 月底時，YouTube 使用者所占的比例為 47.5%

(4)若 20 至 50 歲的閱聽人總數不變，則長期而言，Podcast 使用者所占的比例為 0.6

(5)若 20 至 50 歲的閱聽人總數不變，則長期而言，YouTube 使用者所占的比例為 0.5

9. 已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均為三次多項式函數，且滿足 $g(x) = f(x+2)$ 及 $h(x) = f(x)+2$ ，則下列選項哪些正確？

(1)若點 (a, b) 在 $y = g(x)$ 的圖形上，則點 $(a-2, b+2)$ 在 $y = h(x)$ 的圖形上

(2)若 $y = f(x)$ 的圖形通過點 P ，則 $y = g(x)$ 的圖形不通過點 P

(3)若 $y = f(x)$ 的圖形通過點 P ，則 $y = h(x)$ 的圖形不通過點 P

(4)若方程式 $f(x) = 0$ 有三個實根，則方程式 $g(x) = 0$ 有三個實根

(5)若方程式 $f(x) = 0$ 有三個實根，則方程式 $h(x) = 0$ 有三個實根

10. 為了研究狗與人類的年齡對應關係，醫學研究團隊檢視名為「甲基」(Methyl group)的特定分子在人類基因組特定區域隨著時間而累積的情況，並比對狗基因組類似區域的狀況，研究採集約 100 隻拉布拉多幼犬及成犬的基因資料。結果顯示：出生一年內，甲基在狗基因組累積的速度比人類快出許多，也就是說，狗變老的速度比較快；不過，隨著時間過去，相對於人類，狗的老化速度會減緩。最終研究團隊提出了狗與人類的年齡轉換公式： $H(D) = 36.84 \log D + 31$ (其中 $D \geq 1$)。公式中， D 代表狗的年齡， $H(D)$ 則代表對應到的人類年齡，則下列選項哪些正確？

(1)1 歲的狗相當於 31 歲的人類 (2)10 歲的狗相當於 40 歲的人類

(3)5 歲的狗比 50 歲的人類還要老 (4)若人類在 40 歲邁入中年，則 2 歲的狗已經邁入中年

(5) 狗從 8 歲到 9 歲的平均老化速度比人類快

11. 空間坐標系中有一個三角柱，它由五個面所構成。若此三角柱的五個面所在的平面方程式分別為 $E_1: x + y - 2z = 3$ 、 $E_2: x + y + z = 2$ 、 $E_3: x - z = 5$ 、 $E_4: x - y = 4$ 、

$E_5: x + y + z = 7$ ，則下列選項哪些正確？(1) 此三角柱的五個面均不通過原點

(2) 此三角柱中，互相歪斜的邊共有 12 對

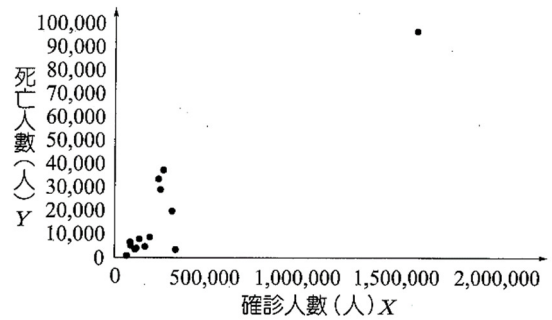
(3) 此三角柱的三個側面是 E_2 、 E_3 、 E_4 ，頂面與底面是 E_1 、 E_5

(4) 此三角柱的頂面與底面是直角三角形 (5) 此三角柱的高為 5

12. 新冠肺炎病毒(COVID-19)擴散全球，死亡數不斷攀升，各國紛紛祭出防疫政策，試圖阻止疫情蔓延。下表是確診人數前 14 多的國家，及其死亡人數統計表。下圖則是將表中的資料繪製成散佈圖，散佈圖的每個點 (X, Y) 分別代表一個國家的確診人數 X 與死亡人數 Y 。

國家	確診人數(X)	死亡人數(Y)
美國	1,551,853	93,439
俄羅斯	308,705	2,972

巴西	291,579	18,859
英國	249,619	35,786
西班牙	232,555	27,888
義大利	227,364	32,330
法國	178,473	8,144
土耳其	152,587	4,222
伊朗	126,949	7,183
印度	112,442	3,438
秘魯	104,020	3,024
中國	84,063	4,638
加拿大	81,575	6,150
沙烏地阿拉伯	62,545	339



現設 $Z = X - Y$ 為該國家的「確診但未死亡」人數，則下列選項哪些正確？(資料取自2020年5月21日聯合新聞網 <https://udn.com/news/COVID19>)

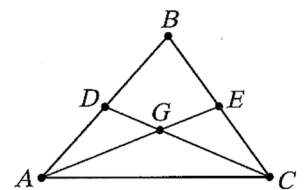
- (1) X 與 Y 的相關係數是正數 (2) X 與 Z 的相關係數為1 (3) Y 與 Z 的相關係數是正數
 (4) 若作出 Y 對 X 的迴歸直線，則此直線之斜率為正數
 (5) 分別將 X 與 Y 兩筆資料標準化，得到新資料 X' 與 Y' ，則「 X' 與 Y' 的相關係數」和「 X 與 Y 的相關係數」相等

第貳部分：選填題（占 40 分）

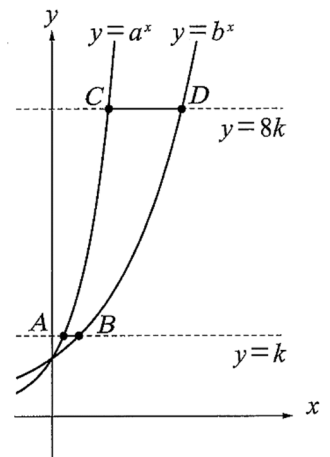
- A. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列，且 $\frac{a_2}{a_1} = 8$ ，若 $\langle b_n \rangle = \langle \log_4 a_n \rangle$ 為一等差數列，則數列 $\langle b_n \rangle$ 的公差為_____。(化為最簡分數)

- B. 如右示意圖， $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 、 $\overline{AC} = 2$ 、 $\angle BAC = 45^\circ$ ，

$\overline{AE}$ 、 $\overline{CD}$ 為中線且交於 G 點，則內積 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CG}$ 之值為_____。
 (化為最簡分數)



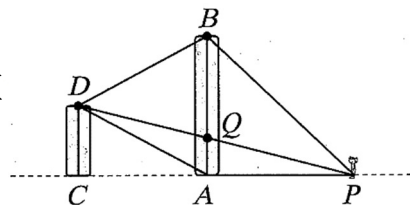
- C. 參考右圖，直線 $y = k$ 分別和指數函數 $y = a^x$ 與 $y = b^x$ 交於 A 、 B 兩點(其中 $k > 1$ 且 $a > b > 1$)，直線 $y = 8k$ 分別和指數函數 $y = a^x$ 與 $y = b^x$ 交於 C 、 D 兩點。已知 $\overline{CD} = 8\overline{AB}$ ，若 $k = 2^p$ ，則 p 之值為_____。(化為最簡分數)



D. 有一數列 $\langle a_n \rangle$ ，設 S_n 表示此數列的前 n 項和，若 $S_n = (-3)^{n-1}$ ，則 $\langle a_n \rangle$ 中最大的三位數為_____。

E. 一個「訊息」是由 8 個數字排列而成的字串，每個數字都只能是 0 或 1。我們定義兩個訊息之間的「距離」為這兩個字串之相對應位置中，數字不同的位置個數。舉例來說，訊息 01001011 與 01011010 的距離是 2，而訊息 00001111 與 11110000 的距離是 8。根據上述定義，與訊息 11011001、訊息 11001011 的距離皆為 3 的訊息共有_____個。

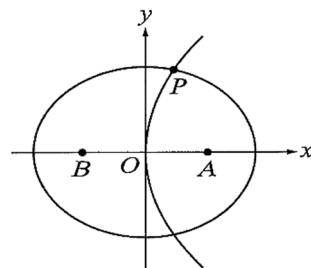
F. 如右圖，一位工程師站在 P 點對兩棟摩天大樓進行測量，工程師所在地與兩建築物底部共線。已知 $\triangle ABP$ 為等腰直角形， $\triangle ABD$ 為正三角形， $\overline{BP} = 1000(\sqrt{3} + 1)$ 公尺， $\overline{PD}$ 與 $\overline{AB}$ 互交於 Q 點，則 $\overline{BQ}$ 之長為_____公尺。
(化為最簡根式)



G. 從 2 到 9 的正整數中任選相異兩數 a 、 b 形成一分數 $\frac{b}{a}$ ，已知此分數為最簡分數，則

$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a} < 1$ 的機率為_____。(化為最簡分數)

H. 參考右圖，橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的兩焦點分別為 A 、 B ，有一拋物線以原點為頂點、 A 為焦點，且與橢圓在第一象限內交於 P 點，則 $\overline{PB}$ 之長為_____。(化為最簡分數)



RA494 台北區 109 學年度第一學期第二次學科能力測驗

參考答案

選擇題：1. (4) 2. (5) 3. (2) 4. (5) 5. (2) 6. (4) 7. (1)(2)(3) 8. (2)(4) 9. (3)(4)

10. (1)(3)(4)(5) 11. (1)(2)(4) 12. (1)(3)(4)(5)

選填題：A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{8}{9}$ C. $\frac{3}{7}$ D. 972 E. 30 F. $1000\sqrt{2}$ G. $\frac{13}{38}$ H. $\frac{23}{4}$