

# 數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(5)	(2)	(5)	(2)	(4)	(1)(2)(3)	(2)(4)	(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(1)(3)(4)(5)	(1)(2)(4)	(1)(3)(4)(5)						

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. (4)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：求解含絕對值的不等式

$$\text{解析：} |2x - \sqrt{3}| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x - \sqrt{3} \leq 5 \Rightarrow -5 + \sqrt{3} \leq 2x \leq 5 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{因此所得區間長度為 } \left| \frac{5 + \sqrt{3}}{2} - \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \right| = 5$$

故選(4)。

2. (5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：熟悉因式定理

解析：因為  $g(x)$  是三次實係數多項式函數，所以  $f(x) = g(x) - h(x)$  也是三次多項式函數

另一方面，由條件  $f(1) = f(0) = f(-1) = 0$  及因式定理可得  $f(x) = kx(x+1)(x-1)$ ，其中  $k \neq 0$

故選(5)。

3. (2)

難易度：易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：能分辨圓、橢圓、雙曲線方程式與其相對應的圖形

解析：由題圖可得圓心  $(a, b)$  在第二象限，即  $a < 0$ 、 $b > 0$  且  $|a| < |b|$ ，因此  $b^2 > a^2 > 0$

$$\text{則 } \frac{(x-b)^2}{a^2} + \frac{(y-a)^2}{b^2} = 1 \text{ 的圖形應為縱向、中心在第四象限的橢圓}$$

故選(2)。

4. (5)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：熟悉二元一次不等式的圖形

解析：因題圖中斜直線之斜率為負數，故  $a$ 、 $b$  必同號

又因  $ax + by \geq c$  的解區域在斜直線左方，因此  $x$  項係數  $a$  為負數，即  $a$ 、 $b$  皆為負數

又此斜直線的  $x$ 、 $y$  截距均為正數，因此  $c$  為負數

綜合以上可得  $(-2, -3, -4)$  最有可能

故選(5)。

5. (2)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：了解空間向量對坐標平面的投影，以及投影與夾角之間的關係

解析： $P(3, -2, -4)$  對  $xy$  平面的投影點為  $P'(3, -2, 0)$

因此與  $\overrightarrow{OP}$  夾角愈小的  $\overrightarrow{OQ}$  向量，其與  $\overrightarrow{OP}$  的夾角也會愈小

觀察各選項可發現向量  $(6, -4, 0) \parallel \overrightarrow{OP'}$ ，亦即  $Q$  點落在射線  $\overrightarrow{OP'}$  上

故選(2)。

6. (4)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：熟悉三角函數的平方關係，並能結合等比中項與勘根定理，加以運用

解析：由等比中項性質可知  $\cos^2 \theta = \sin \theta \tan \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$

$$\Rightarrow \cos^3 \theta = \sin^2 \theta \Rightarrow \cos^3 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \cos^3 \theta + \cos^2 \theta - 1 = 0$$

設  $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ，則  $\cos \theta$  為  $f(x) = 0$  之實根

$$\text{因 } f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \text{ 且 } f\left(\frac{4}{5}\right) > 0, \text{ 由勘根定理可得 } \frac{3}{4} < \cos \theta < \frac{4}{5}$$

故選(4)。

## 二、多選題

7. (1)(2)(3)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：能了解空間概念，並運用在兩平面的夾角上

解析：(1)○：由兩平面夾角的定義得知， $\overrightarrow{AC}$  與  $\overrightarrow{BD}$  的夾角為  $60^\circ$

(2)○：因為  $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{AB}$  且  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = 1$ ，故  $\triangle ABC$  為等腰直角三角形，所以  $\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$

$$(3) \circ : \overrightarrow{CD}^2 = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + 2(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2(0 + 0 + 2 \times 1 \times \cos 120^\circ) = 4$$

$$\text{故 } \overrightarrow{CD} = 2$$

$$(4) \times : \cos \angle CAD = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{CD}^2}{2 \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}} = \frac{1^2 + (\sqrt{5})^2 - 2^2}{2 \times 1 \times \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(5)×： $\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$ ， $\overrightarrow{BD} = 2$ ， $\overrightarrow{CD} = 2$ ，由  $\triangle BCD$  的三邊長可知其並非直角三角形

故選(1)(2)(3)。

8. (2)(4)

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能運用轉移矩陣解決生活中的問題

解析：依題意，轉移矩陣  $M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$ ，初始狀態  $P_0 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$$\text{2021年1月底時, } P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\text{2021年2月底時, } P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.525 \\ 0.475 \end{bmatrix}$$

設達穩定狀態時，YouTube 使用者所占的比例為  $x$

$$\text{則有 } P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}, \text{ 解得 } x = 0.4$$

故長期而言，YouTube 使用者所占的比例為 0.4，Podcast 使用者所占的比例為 0.6

故選(2)(4)。

9. (3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解函數及其圖形平移後的意義

解析：(1)×：應為  $(a+2, b+2)$

(2)×： $f(x)$  與  $g(x)$  的圖形是左右平移關係，所以點  $P$  未必不在  $y=g(x)$  的圖形上

(3)○： $f(x)$  與  $h(x)$  的圖形是上下平移關係，所以點  $P$  必定不在  $y=h(x)$  的圖形上

(4)○： $f(x)$  與  $g(x)$  的圖形是左右平移關係，所以  $g(x)=0$  必有三個實根

(5)×： $f(x)$  與  $h(x)$  的圖形是上下平移關係，所以  $h(x)=0$  不一定有三個實根

故選(3)(4)。

10. (1)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：能運用指對數解決生活中的問題

解析：(1) ○： $H(1) = 36.84 \times \log 1 + 31 = 31$

(2) ✕： $H(10) = 36.84 \times \log 10 + 31 = 67.84$

(3) ○： $H(5) = 36.84 \times \log 5 + 31 \approx 56.75 > 50$

(4) ○： $H(2) = 36.84 \times \log 2 + 31 \approx 42.09 > 40$

(5) ○：狗 8 歲約等同於人類  $H(8) \approx 64.27$  歲，狗 9 歲約等同於人類  $H(9) \approx 66.15$  歲  
因為  $H(9) - H(8) > 9 - 8$ ，所以狗從 8 歲到 9 歲的平均老化速度比人類快

故選(1)(3)(4)(5)。

11. (1)(2)(4)

難易度：難

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：了解空間中的平面方程式所代表的幾何意義，並能判斷兩平面間是否垂直、平行

解析：(1) ○：將  $(0, 0, 0)$  代入五個面的平面方程式，均不合

(2) ○：對於頂面與底面的每一個邊，都有 3 個邊與其互相歪斜

對於此三角柱的每一個側邊，都有 2 個邊與其互相歪斜

扣除每個邊被重複計算一次，共有  $(3 \times 6 + 2 \times 3) \div 2 = 12$  對互相歪斜的邊

(3) ✕：觀察選項可發現  $E_2$  與  $E_5$  互相平行，其餘均不平行

因此  $E_2$  與  $E_5$  必為頂面與底面， $E_1$ 、 $E_3$ 、 $E_4$  為側面

(4) ○：承(3)，透過檢驗  $E_1$ 、 $E_3$ 、 $E_4$  的法向量可知  $E_1 \perp E_4$ ，故為直角三角形

(5) ✕：此三角柱的高即  $E_2$  與  $E_5$  的距離  $\frac{|2-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

故選(1)(2)(4)。

12. (1)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

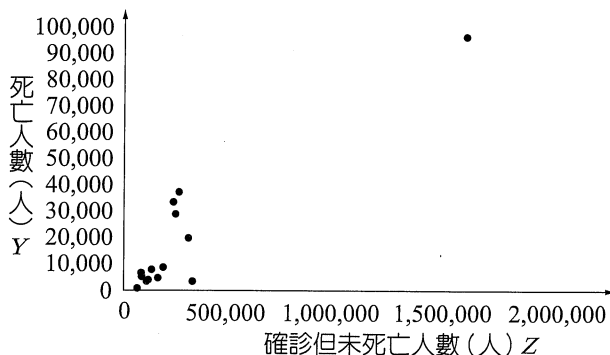
目標：能解讀圖表資訊，了解相關係數、迴歸直線斜率、標準化資料的概念

解析：(1) ○：觀察圖表即可得知  $X$  與  $Y$  的相關係數是正數

(2) ✕：因死亡人數大部分僅占確診人數 10% 以內，得知相關性強，但非完全正相關

(3) ○：因死亡人數大部分僅占確診人數 10% 以內

故將題圖中的確診人數  $X$  向左移一點點即與  $Z$  相似，此時  $Y$  與  $Z$  的相關係數仍為正數



(4) ○：迴歸直線斜率之正負性與相關係數相同

(5) ○：標準化後數據的相關係數仍與原數據相同

故選(1)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A.  $\frac{3}{2}$

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：了解等差數列與等比數列基本定義、對數基本性質

解析：因  $\langle b_n \rangle = \langle \log_4 a_n \rangle$ ，故公差為  $b_2 - b_1 = \log_4 a_2 - \log_4 a_1 = \log_4 \frac{a_2}{a_1} = \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$ 。

B.  $-\frac{8}{9}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第三章〈平面向量〉

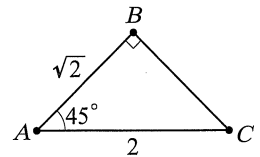
目標：理解內積與餘弦定理的關聯性

解析：由餘弦定理  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \cos 45^\circ = 2 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{2}$

又  $\overline{BA} = \overline{BC} = \sqrt{2}$  且  $\angle BAC = 45^\circ$ ，所以  $\triangle ABC$  為等腰直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$

因  $\overline{AE}$ 、 $\overline{CD}$  為中線且交於  $G$  點，所以  $G$  為  $\triangle ABC$  之重心

$$\begin{aligned} \text{因此 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CG} &= \left( \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} \right) \\ &= \frac{1}{9} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{9} (-2 + 0 - 4 - 2) = -\frac{8}{9}。 \end{aligned}$$



C.  $\frac{3}{7}$

難易度：難

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：熟悉指對數函數的定義、運算與圖形

解析：依題意， $\overline{AB} = \log_b k - \log_a k$ ， $\overline{CD} = \log_b 8k - \log_a 8k = (\log_b 8 - \log_a 8) + \overline{AB} = 8\overline{AB}$ ，

因此  $7\overline{AB} = 7(\log_b k - \log_a k) = \log_b 8 - \log_a 8$ ，故  $8 = k^7 \Rightarrow k = 8^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{3}{7}}$ ，即  $p = \frac{3}{7}$ 。

D. 972

難易度：中

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：熟悉等比數列與級數和

解析： $a_n = S_n - S_{n-1} = (-3)^{n-1} - (-3)^{n-2} = (-4) \times (-3)^{n-2}$ ，其中  $n \geq 2$

解  $100 \leq (-4) \times (-3)^{n-2} < 1000 \Rightarrow -25 \geq (-3)^{n-2} > -250$ ，其中  $n$  必須為奇數

符合條件的  $n$  值有 5 或 7，當  $n=7$  時  $a_7 = (-4) \times (-3)^5 = 972$  為最大值。

E. 30

難易度：難

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能整合運用題意中的各項資訊，並利用排列組合分析問題

解析：令  $a = 11011001$ 、 $b = 11001011$ ， $c$  為此題所求的訊息

又令  $a_n$ 、 $b_n$ 、 $c_n$  表示此訊息的第  $n$  個數字

先考慮數字不同的兩個位置（第 4 碼與第 7 碼）

訊息  $c$  有兩種可能的建構方式：

「 $c_4 = a_4 \neq b_4$ ， $c_7 = b_7 \neq a_7$ 」或「 $c_4 = b_4 \neq a_4$ ， $c_7 = a_7 \neq b_7$ 」

此時  $c_4$ 、 $c_7$  與  $a_4$ 、 $a_7$ 、 $b_4$ 、 $b_7$  之間的距離均為 1

接著考慮數字相同的六個位置  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_5$ 、 $c_6$ 、 $c_8$ ，無論上述為何種建構方式

均需再從  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_5$ 、 $c_6$ 、 $c_8$  中任選兩個數字，使其不同於訊息  $a$  與  $b$  中的相對位置

才能滿足「與訊息  $a$ 、 $b$  距離皆為 3」的要求，故共有  $2 \times C_2^6 = 30$  個。

F.  $1000\sqrt{2}$

難易度：易

出處：第三冊第一章〈三角〉

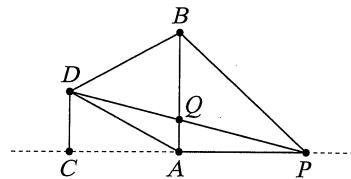
目標：利用正弦定理進行三角測量

解析：△APD 中， $\angle PAD=150^\circ$  且  $\overline{AP} = \overline{AD}$ ， $\angle APD = \angle ADP = 15^\circ$ ，得  $\angle BQP = 105^\circ$

$$\triangle BQP \text{ 中，由正弦定理得 } \frac{\overline{BP}}{\sin 105^\circ} = \frac{\overline{BQ}}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{將 } \overline{BP} = 1000(\sqrt{3} + 1), \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

代入可解得  $\overline{BQ} = 1000\sqrt{2}$ 。



G.  $\frac{13}{38}$

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：機率總和為 1、對數的運算

解析： $\frac{b}{a}$  共有  $8 \times 7 = 56$  種選擇，其中有 28 種小於 1、另外 28 種大於 1

小於 1 的 28 個分數中，最簡分數只有 19 個，所以大於 1 的最簡分數也是 19 個

全部列出可發現這些最簡分數中，小於  $\frac{1}{2}$  的有 6 個，故所求機率為  $\frac{1}{2} - \frac{6}{38} = \frac{13}{38}$ 。

H.  $\frac{23}{4}$

難易度：難

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：熟悉拋物線與橢圓的定義及方程式

解析：由橢圓方程式知  $A(3, 0)$ 、 $B(-3, 0)$ ，因此拋物線方程式為  $y^2 = 12x$

$$\text{將 } y^2 = 12x \text{ 代入橢圓 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \text{ 得 } \frac{x^2}{25} + \frac{12x}{16} = 1$$

$$\text{整理得 } 4x^2 + 75x - 100 = 0 \Rightarrow (4x - 5)(x + 20) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ 或 } x = -20 \text{ (不合)}$$

$$\text{由拋物線定義得 } \overline{PA} = \left| \frac{5}{4} - (-3) \right| = \frac{17}{4}$$

$$\text{由橢圓定義得知 } \overline{PA} + \overline{PB} = 10, \text{ 因此 } \overline{PB} = 10 - \frac{17}{4} = \frac{23}{4}。$$

〈另解〉

設  $\overline{PB} = x$ ，由橢圓定義得知  $\overline{PA} = 10 - x$

再由拋物線定義得知  $P$  到準線  $L: x = -3$  的距離亦為  $10 - x$

在  $x$  軸上取一點  $Q$ ，使得  $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ ，此時  $\overline{QB} = d(P, L) = 10 - x$

又因  $\overline{AB} = 6$ ，故  $\overline{QA} = \overline{AB} - \overline{QB} = x - 4$

$$\text{利用畢氏定理，} \overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{QB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{QA}^2$$

$$\text{即 } x^2 - (10 - x)^2 = (10 - x)^2 - (x - 4)^2, \text{ 解得 } x = \overline{PB} = \frac{23}{4}。$$

