

大考中心 110 試辦考試-數學 A

第壹部分：選擇題（占 85 分）

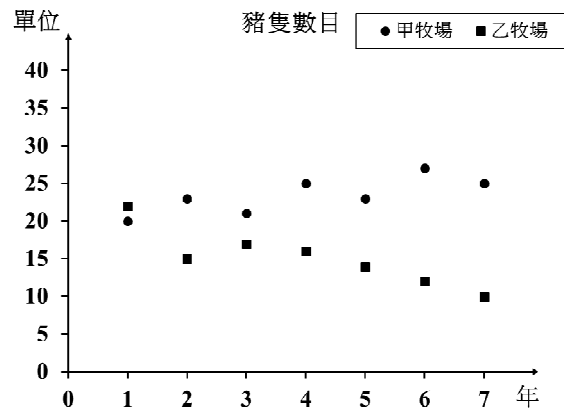
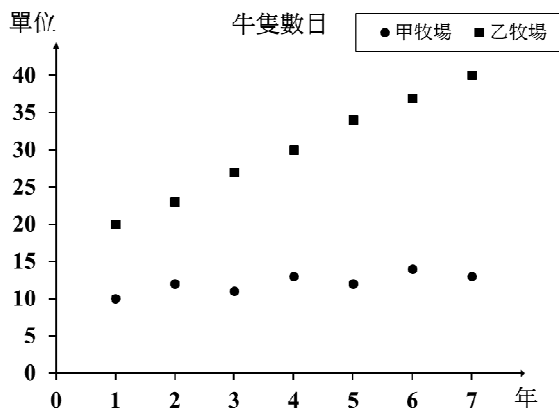
一、單選題（占 35 分）（1~7 每題 5 分）



- 試問 $\log(2+\sqrt{3})$, $\log(2-\sqrt{3})$, $-\log(2+\sqrt{3})$, $-\log(2-\sqrt{3})$, $\log 2 + \log \sqrt{3}$ 這五個數中共有多少個不同的實數？(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
- 試問有多少個整數 x 滿足不等式 $|x-10| < |x-60| < |x+10|$ ？
(1) 8 個 (2) 9 個 (3) 10 個 (4) 11 個 (5) 20 個
- 已知坐標平面上 $\triangle ABC$ 的一頂點 $A(2,3)$ ，且知過另兩頂點 B, C 的中線方程式分別為 $8x+5y=14$ 與 $x+7y=6$ ，試問過頂點 A 的中線斜率為下列哪一選項？
(1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{7}$ (4) $-\frac{2}{7}$ (5) $-\frac{7}{2}$
- 設 E 為坐標空間中通過 $(1,0,-1)$ 和 $(1,-1,0)$ 兩點且與直線 $\frac{1}{2}x - \frac{13}{7} = y + 19 = -2z$ 平行的平面。在下列選項中，試選出與 E 所夾銳角為最小的平面方程式。
(1) $x=0$ (2) $y=0$ (3) $z=0$ (4) $x+y=0$ (5) $y+z=0$
- 甲、乙、丙三人到旋轉壽司餐廳用餐。餐廳現有 10 種壽司，每種壽司僅剩 2 盤。假設每種壽司每個人至多只能拿 1 盤，用完餐後發現每種壽司都至少有人拿了 1 盤。試問三人拿取壽司的組合共有幾種？
(1) 2^{10} (2) 5^{10} (3) 6^{10} (4) 7^{10} (5) 8^{10}
- 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x$ 且 $0 \leq x \leq 2\pi$ ？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

二、多選題（占 30 分）（7~12 每題 5 分）

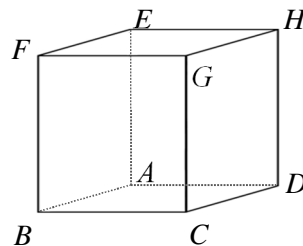
7. 甲乙兩牧場記錄了 7 年畜養牛、豬的數目，其畜養牛、豬數目與時間資料分別如下圖所示（1 單位代表 100 隻）。



依據上述資料，試選出正確的選項。

- 甲、乙牧場的牛隻數目都逐年增加
- 甲牧場牛隻數目的中位數為 10 單位
- 甲牧場牛隻數目的標準差小於 3 單位
- 乙牧場豬隻數目的算術平均數最接近的整數單位為 15
- 甲牧場牛與豬隻數目的相關係數大於乙牧場牛與豬隻數目的相關係數

8. 已知 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且 $y = f(x)$ 的圖形開口向下，頂點在 $(2, 3)$ ；而 $g(x)$ 為實係數三次多項式，且 $y = g(x)$ 的圖形最右方會下降到負無限大，對稱中心在 $(2, -1)$ 。試選出正確的選項。
- (1) $y = f(-x)$ 的圖形開口向上 (2) $y = g(-x)$ 的圖形最右方會上升到正無限大
 (3) $y = g(-x)$ 的圖形對稱中心在 $(-2, 1)$ (4) $y = f(x) + g(x)$ 的圖形對稱中心在 $(2, 2)$
 (5) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形在 $x < 2$ 時恰有一個交點
9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 3$ ，且 $\overline{BC} = a$ 。試選出正確的選項。
- (1) $a > 1$ (2) 若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，則 $a > \sqrt{13}$
 (3) 可以找到一個 a ，使得 $\angle B < \angle A < \angle C$
 (4) 可以找到一個 a ，使得 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\sqrt{2}$
 (5) 可以找到一個 a ，使得 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 2021
10. 某公司舉辦抽獎活動，發出編號 001 到 640 共 640 張彩券。抽獎方式為先由 0 到 9 十個數字中隨機抽出一個作為中獎號碼的百位數字，再依同樣方式依序抽出十位數字與個位數字。每次抽數字皆不受前面已抽結果影響，且 0~9 任一數被抽出的機率皆為 $\frac{1}{10}$ 。如果抽出的號碼不在 001~640 之間，則依前述方式重新再抽三個數字作為中獎號碼；若連續三輪都抽不出中獎號碼，則此抽獎活動無人中獎。試選出正確的選項。
- (1) 123 號與 321 號中獎機率相同 (2) 每個號碼中獎機率皆為 $\frac{1}{640}$
 (3) 若有人中獎，則此中獎號碼的百位數字為 1 與百位數字為 6 的機率相同
 (4) 抽到第三輪且有人中獎的機率大於 5% (5) 此抽獎活動有人中獎的機率小於 93%
11. 設坐標平面上原點為 O ，點 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 滿足 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 2$ ，而點 C, D 滿足 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 且 $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + (2-k)\overrightarrow{OB}$ ，其中 $k \neq 1$ 為一實數。試選出正確的選項。
- (1) 若 O, A, D 三點共線，則 $k = 2$ (2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行
 (3) $\triangle OAC$ 的面積為 2 (4) $\triangle ABD$ 的面積與 k 無關 (5) $\triangle ACD$ 的面積與 k 無關
12. 坐標空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$ （如圖）。四個頂點的坐標為 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(1, 0, 0)$ 、 $D(0, 1, 0)$ 、 $E(0, 0, 1)$ ，其中 $ABCD$ 為正立方體的一個面（不考慮其延伸平面）。考慮方向向量為 $(1, 2, 3)$ 且通過點 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ 的直線 L ，試選出正立方體中會與 L 有交點的面。
- (1) $ABFE$ (2) $ADHE$ (3) $BCGF$ (4) $CDHG$ (5) $EFGH$



三、選填題（占 25 分）(13~17 每題 5 分)

13. 某公司趣味競賽共有 32 位同仁參加，競賽採單淘汰制，每位輸了一場就淘汰。每場沒有和局，勝者晉級下一輪。公司提供每位參加同仁基本獎 1 千元，第一輪獲勝者另加獎金 2 千元，第二輪獲勝者再加獎金 4 千元，依此方式，每輪獲勝獎金為前一輪的 2 倍，例如第三輪才輸的同仁共可得到 7 千元，則最後一場獲勝者總共可得_____千元。

14. 某品牌手機的電池由 A,B 兩家廠商製造，其中 40% 是 A 廠製造、60% 是 B 廠製造。已知 A 廠的電池有 90% 的機率可以正常使用超過一年，而 B 廠的電池有 75% 的機率可以正常使用超過一年。假設某甲有此品牌的手機且電池已經正常使用超過一年，則某甲手機的電池是 A 廠製造的機率為_____。（化為最簡分數）
15. 已知 $a > 1$ ，且知當 $0 \leq x \leq 2$ 時， $y = a^{x^2-3x+3}$ 的最小值為 $\frac{27}{8}$ ，則 $a =$ _____。
(化為最簡分數)
16. 在坐標平面上，任給共線三點 A, B, C 且 A, B 在 C 點的同側，若以 C 為圓心、半徑為 r 的圓 Γ 滿足（線段乘積） $\overline{CA} \times \overline{CB} = r^2$ ，則稱 A, B 互為對圓 Γ 的反演點。設 Γ 為 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$ ，則點 $A(2, -2)$ 對圓 Γ 的反演點 B 的坐標為(_____, _____)。
17. 設 A, B, C, D 為空間中正四面體的四個頂點，另有一點 E 與點 D 分別在 $\triangle ABC$ 所在平面的兩側，且(向量內積) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 。則 $\cos \angle DAE =$ _____。
(化為最簡根式)

第貳部分：混合題（占 15 分）

第 18. 至 20. 題為題組

以 T 表由 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 定義的平面線性變換，其中 a, b 為實數。試回答下列問題。

18. 若 T 將點 $(0, 1)$ 映射到直線 $y = 5x + 13$ 上一點，試問下列哪一選項是正確的？
(單選題，3 分)
(1) $a - 5b = 13$ (2) $a + 5b = 13$ (3) $5a - b = 13$ (4) $5a + b = 13$ (5) $-5a + b = 13$
19. 若 T 將直線 $y = x + 1$ 上的點都映射到直線 $y = 5x + 13$ 上，試求 a, b 。(非選擇題，6 分)
20. (承 19 題) 設 P, Q 為平面上兩相異點，令 $P' = T(P)$ 、 $Q' = T(Q)$ ，試說明 $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}$ 為定值，並求此值。(非選擇題，6 分)

RA496 大考中心 110 試辦考試-數學 A

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (2) 3. (1) 4. (5) 5. (3) 6. (4) 7. (3)(4)(5) 8. (2)(5) 9. (1)(5)
10. (1)(4) 11. (1)(2)(4) 12. (5)

選填題：13. 63 14. $\frac{4}{9}$ 15. $\frac{81}{16}$ 16. (5,1) 17. $\frac{-\sqrt{6}}{3}$

混合題：18. (2) 19. $a=3$, $b=2$ 20. $\sqrt{a^2+b^2}$