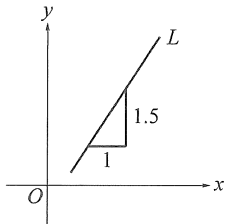


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14-1	14-2
2	4	5	4	1	2	5	45	3	35	45	23	15	-	6
14-3	15-1	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	18	19	20			
0	8	1	2	1	0	-	2	0	2					

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 依斜率定義量測如下，直線 L 的斜率為 1.5，



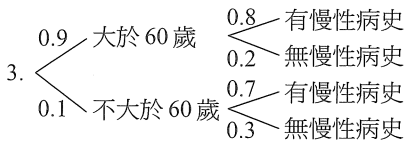
故選(2)。

2. 設公比為 r ，

將第一項到第十項每一項乘上 r^2 為第三項到第十二項

$$\Rightarrow 369r^2 = 164 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3} \text{ (取正)} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = r = \frac{2}{3}$$

故選(4)。



$$\therefore \text{所求} = \frac{0.9 \times 0.8}{0.9 \times 0.8 + 0.1 \times 0.7} = \frac{72}{79} \approx 0.91 = 91\%$$

故選(5)。

4. 30 天後的股價為一開始股價的 $(1+8\%)^{30} = 1.08^{30}$ 倍，

$$\log 1.08 = \log \frac{108}{100} = \log 108 - \log 100 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - \log 100 \approx 0.0333$$

$$\log 1.08^{30} = 30 \log 1.08 \approx 0.999 \approx 1 = \log 10$$

所以 1.08^{30} 倍 ≈ 10 倍，

故選(4)。

5. $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平分 \vec{a} 與 \vec{b} 夾角 $\Rightarrow |\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 。

$$\text{設 } |\vec{b}| = k > 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 2k, |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6}k$$

$$\text{又 } |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$6k^2 = 4k^2 + 4 \times 2k \times k \cos \theta + 4k^2 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

故選(1)。

6. 設 $\overline{AP} = x$ ， $\overline{PB} = y \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 - 2xy$ ，

$$\overline{QR}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 30^\circ = 400 - (2 + \sqrt{3})xy$$

又 $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 100$ 即 xy 的最大值為 100

$$\Rightarrow \overline{QR}^2 \text{ 的最小值為 } 400 - (2 + \sqrt{3}) \times 100 = 200 - 100\sqrt{3} \approx 26.8$$

故選(2)。

7. $T_0 = -2$ ， $H = 23$ ， $T(1) = 3$ ，

$$3 - 23 = (-2 - 23) \times 2^{-a}, 2^{-a} = \frac{4}{5}$$

設經過了 t 小時，牛肉溫度降到 13°C ，

$$13 - 23 = (-2 - 23) \times 2^{-at}, 2^{-at} = \frac{2}{5}, \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{2}{5}$$

$$\text{所以 } t = \log_{\frac{4}{5}} \frac{2}{5} = \frac{\log \frac{2}{5}}{\log \frac{4}{5}} = \frac{\log 2 - \log 5}{2 \log 2 - \log 5} \approx 4.1$$

所求 $\approx 4.1 - 1 = 3.1$ 小時，

故選(5)。

二、多選題

8. (1) \times : $\sin \theta = -\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ 。

(2) \times : $\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ 。

(3) \times : $\tan \theta = -\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ 。

(4) \circ : $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ 。

(5) \circ : $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ 。

故選(4)(5)。

9. (1) \times : 迴歸直線斜率 $\frac{7}{8} = r \times \frac{14}{16} \Rightarrow r = 1$ 。

(2) \times : $r = 1$ 表示 (μ_x, μ_y) 及 (x_k, y_k) 均在

直線 $y = \frac{7}{8}x + 5$ 上，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ 。

$$\mu_y = \frac{7}{8}\mu_x + 5, \text{ 若 } \mu_x = 40,$$

則 $\mu_y = 40$ 為此選項的反例。

(3) \circ (4) \times : 由 (x_k, y_k) 均在直線 $y = \frac{7}{8}x + 5$ 上，

其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ 。

可知數學和物理的最高分必是同一人；

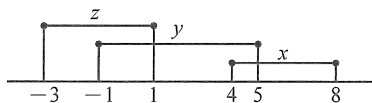
數學和物理的最低分也必是同一人。

(5) \times : 可以預測褚衛的物理成績為 $\frac{7}{8} \times 80 + 5 = 75$ 分，

但不一定為 75 分。

故選(3)。

10. $4 \leq x \leq 8$ ， $-1 \leq y \leq 5$ ， $-3 \leq z \leq 1$ ，如下圖所示。



(1) \times : $-1 \leq x - y \leq 9 \Rightarrow x - y$ 的最大值為 9。

(2) \times : $-2 \leq y - z \leq 8 \Rightarrow y - z$ 的最小值為 -2。

(3) \circ (4) \times : 當 $x = 4$ ， $1 \leq y \leq 4$ ， $z = 1$ 時， $|x - y| + |y - z|$ 有最小值為 3。

(5) \circ : 當 $x = 8$ ， $-1 \leq y \leq 5$ ， $z = -3$ 時，

$|x - y| + |y - z|$ 有最大值為 11。

故選(3)(5)。

11. 令 $y = mx$ 的斜角為 ϕ ，則 $m = \tan \phi$ ，

$$\text{所以 } A = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}, \text{ 而 } B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\phi - \theta) & \sin(2\phi - \theta) \\ \sin(2\phi - \theta) & -\cos(2\phi - \theta) \end{bmatrix}$$

為鏡射矩陣。

(1) \times : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ 為二階單位方陣，非鏡射矩陣。

(2) \times : $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$

為旋轉 30° 的旋轉矩陣。

(3) \times : $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix}$

為旋轉 -30° 的旋轉矩陣。

(4) \circ : $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$

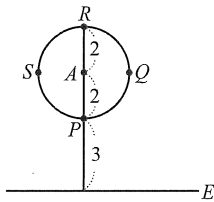
為對 $y = (\tan \alpha)x$ 鏡射的矩陣， $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。

(5) \circ : $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 135^\circ & \sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & -\cos 135^\circ \end{bmatrix}$

為對 $y = (\tan 67.5^\circ)x$ 鏡射的矩陣。

故選(4)(5)。

12. 依題意繪截面圖如右，直線 L 為自 A 點垂直紙面射出的直線，直線 M 為自圓上的點垂直紙面射出的直線，平面 E 亦為垂直紙面而出的平面。



- (1) \times : $d=2$ 時，直線 M 只有 0 條。
 (2) \circ : $d=3$ 時，直線 M 只有 1 條，為自 P 點垂直紙面的直線。
 (3) \circ : $d=5$ 時，直線 M 只有 2 條，為分別自 Q, S 兩點垂直紙面的直線。
 (4) \times : $d=7$ 時，直線 M 只有 1 條，為自 R 點垂直紙面的直線。
 (5) \times : $d=8$ 時，直線 M 只有 0 條。

故選(2)(3)。

13. (1) \circ : 依題意可知

$$y=f(x)=3(x-2)^3+4x-7$$

$$=3(x-2)^3+4(x-2)+1$$

$$\Rightarrow \text{中心}(2, 1), \text{即 } k=1.$$

(2) \times (3) \times : $y=3x^3-9x^2+bx+c=3(x-1)^3+\dots$

$$\Rightarrow \text{中心}(1, 1)$$

$$\Rightarrow y=3x^3-9x^2+bx+c=3(x-1)^3+4(x-1)+1$$

$$\Rightarrow b=13, c=-6.$$

(4) \times : $f(x)$ 除以 $(7x-7)$ 的餘式 $=f(1)=-6$ 。

(5) \circ : 設 $f(x)=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)q(x)+mx+n$

$$=\frac{1}{6}(x-2)(x-1)q(x)+mx+n$$

$$\Rightarrow f(2)=2m+n, f(1)=m+n, \text{又 } f(2)=1, f(1)=-6$$

$$\Rightarrow m=7 \text{ 且 } n=-13,$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 除以 } \frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \text{ 的餘式為 } 7x-13.$$

故選(1)(5)。

三、選填題

14. $100 \times \frac{C_2^2}{C_2^6} + 200 \times \frac{C_2^2}{C_2^6} + 300 \times \frac{C_2^2}{C_2^6}$

$$=100 \times \frac{1}{15} + 200 \times \frac{1}{15} + 300 \times \frac{1}{15} = 40,$$

$$\text{所以 } E=40-100=-60.$$

15. $A \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$

$$\det(A) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \det(A)=4,$$

$$\triangle OP'Q' = \frac{2 \times 2}{2} = 2,$$

$$\Rightarrow \text{所求} = |\det(A)| \times \triangle OP'Q' = 4 \times 2 = 8.$$

16. 圓 $\Gamma : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 45$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ 的外接圓半徑 } R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

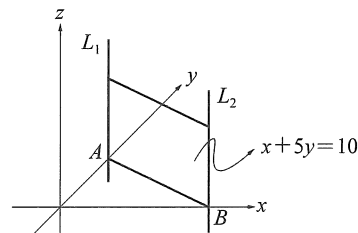
設 \vec{u}, \vec{v} 夾角為 θ

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3 \times (-1) + 4 \times 2}{\sqrt{3^2+4^2} \sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{2R} = \sin A = \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times 2R = 12.$$

17. 依題意，繪示意圖如下，



$L_1 \parallel L_2$ 且 L_1 過點 $A(0, 2, 0)$,

L_2 過點 $B(10, 0, 0)$,

$$\overline{AB} \perp L_1, \overline{AB} \perp L_2 \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{AB} = (10, -2, 0).$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $y=f_1(x)=2 \sin 7x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{7}$,

故選(2)。

19. 令 $y=f_3(x)=\sin 70x+\sin 69x$,

由性質 1，因為 $(70, 69)=1$ ，(2 分)

所以 $y=f_3(x)$ 的週期為 2π 。(3 分)

20. 由性質 2 可知，

$$f_3\left(\frac{x}{10}\right)=\sin 7x+\sin 6.9x \text{ 的週期為 } \frac{2\pi}{\frac{1}{10}}=20\pi. (5 \text{ 分})$$